Tentamen SSY042/SSY043
Signaler och System, Z2

Lösningsförslag

9 juni 2022 kl. 08:30-12.30

1. (a) Man ser att det finns $N = 5$ sampel/period.

$$\begin{aligned}
x(t) = \cos(\omega t) \;&\rightarrow\; \text{samplas} \;\rightarrow\; x[n] = \cos(\omega\, nT) = \cos(\Omega\, n) \\
\Omega = \omega T &= \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{5} \\
f_s &= \frac{1}{T} = 800 \text{ Hz} \\
\omega &= \frac{\Omega}{T} = \Omega \cdot f_s = \frac{2\pi}{5} \cdot 800 = 320\pi = 2\pi \cdot 160 \text{ rad/s}
\end{aligned}$$

(b) Insignal till h_1 är $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] - \delta[n-2]$
$h_1[n] = u[n] - u[n-3] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$
Superposition ger utsignal från h_1: $y_1[n] = h_1[n] + h_1[n-1] - h_1[n-2]$
h_2 fördröjer signalen ett steg:
$y[n] = y_2[n] = y_1[n-1] = h_1[n-1] + h_1[n-2] - h_1[n-3]$
Vilket ger

n	0	1	2	3	4	5	6
$h_1[n-1]$	0	1	1	1	0	0	0
$h_1[n-2]$	0	0	1	1	1	0	0
$-h_1[n-3]$	0	0	0	-1	-1	-1	
Summera	-	-	-	-	-	-	-
$y_[n]$	0	1	2	1	0	-1	0

$$y[n] = y_2[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3] - \delta[n-5]$$

Alternativ lösning:

$$\begin{aligned}
X(z) &= \mathcal{Z}\{x[n]\} = 1 + z^{-1} - z^{-2} \\
H_1(z) &= \mathcal{Z}\{h_1[n]\} = 1 + z^{-1} + z^{-2} \\
H_2(z) &= \mathcal{Z}\{h_2[n]\} = z^{-1} \\
Y(z) &= X(z)H_1(z)H_2(z) = (1 + z^{-1} - z^{-2})(1 + z^{-1} + z^{-2})z^{-1} = \cdots = \\
&= (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} - z^{-2} - z^{-3} - z^{-4})z^{-1} = \\
&= z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3} - z^{-5}
\end{aligned}$$

Invers z-transform ger $y[n]$ enligt ovan.

2. Beräkna systemets stegsvar. Impulssvaret är

$$h[n] = (0.5)^n u[n-1] = 0.5(0.5)^{n-1} u[n-1] \quad .$$

z-transform ger $H(z) = 0.5\, z^{-1} \frac{z}{z-0.5} = \frac{0.5}{z-0.5}$. Insignal $x[n] = u[n]$ med z-transform $X(z) = \frac{z}{z-1}$. Utsignalens z-transform är

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z\, 0.5}{(z-1)(z-0.5)} = z \cdot \frac{0.5}{(z-1)(z-0.5)}$$

PBU av $\frac{Y(z)}{z}$

$$\frac{0.5}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.5}$$
$$0.5 = A(z-0.5) + B(z-1)$$

ger

$$\begin{cases} z^0: & 0.5 = -0.5A - B \\ z^1: & 0 = A + B \end{cases} \qquad \text{med lösningen}: \quad A = -B = 1$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

Invers z-transform ger

$$y[n] = u[n] - 0.5^n u[n] = (1 - 0.5^n) u[n]$$

3. (a) $T = \frac{2\pi}{\omega_o}$ och $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$.

(b)

$$H(j\omega) = \frac{j\,\frac{\omega}{\omega_o}}{(j\,\frac{\omega}{\omega_o})^2 + j\,\frac{\omega}{\omega_o} + 1}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{(2n-1)^2} \cos\left((2n-1)\omega_o\, t\right) \quad .$$

Studera frekvenserna $\omega = \omega_o$, $3\omega_o$, $5\omega_o$ (de tre första $\neq 0$)

$\omega = \omega_o$**:** $H(j\omega_o) = \frac{j}{-1+j+1} = 1$ med $|H| = 1$ och $\arg\{H\} = 0$

$\omega = 3\,\omega_o$**:** $H(j3\omega_o) = \frac{j3}{-9+j3+1} = \frac{j3}{-8+j3}$
$|H| = \frac{3}{\sqrt{64+9}} = \frac{3}{\sqrt{73}}$ och $\arg\{H\}$ =90°-159.4°= -69.4°

$\omega = 5\,\omega_o$**:** $H(j5\omega_o) = \frac{j5}{-25+j5+1} = \frac{j5}{-24+j5}$
$|H| = \frac{5}{\sqrt{576+25}} = \frac{5}{\sqrt{601}}$ och $\arg\{H\}$=90°-168.2°= -78.2°

Systemets påverkan på insignalen ger utsignalens amplitud och fas för de sökta frekvenserna.

n	ω	A_n	φ_n
1	ω_o	$\frac{20}{1} \cdot 1 = 20$	0°
2	-	-	-
3	$3\omega_o$	$\frac{20}{5^2} \cdot \frac{3}{\sqrt{73}} \approx 0.28$	-69.4°
4	-	-	-
5	$5\omega_o$	$\frac{20}{9^2} \cdot \frac{5}{\sqrt{601}} \approx 0.050$	-78.2°

4.

$$
\begin{aligned}
\omega_m &= 10\pi \text{ rad/s} \\
\omega_s &= 4\,\omega_m \\
\omega_1 &= \frac{k_1}{N}\,\omega_s = 2\pi(0.4) \text{ rad/s} \\
\omega_2 &= \frac{k_2}{N}\,\omega_s = 2\pi(0.45) \text{ rad/s} \\
\omega_2 - \omega_1 &= (k_2 - k_1)\frac{\omega_s}{N} \\
k_2 - k_1 &= \frac{(\omega_2 - \omega_1)N}{\omega_s} \geq 10 \\
N &\geq \frac{10\,\omega_s}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{10 \cdot 4 \cdot 10\pi}{2\pi(0.45 - 0.40)} = 4000
\end{aligned}
$$

Sampelintervall $T = \dfrac{2\pi}{\omega_s}$.

Längd på insamlad signal, $t_N \geq T \cdot N = \dfrac{2\pi}{40\pi} \cdot 4000 = 200$ s

5. Diff.ekv.

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3\,x(t) \quad .$$

Laplacetransformera

$$Y(s)\,(s^3 + 3s^2 + 4s + 2) = 3X(s)$$

Överföringsfunktion

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

Beräkna impulssvar $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$. Sök poler.
Vi ser 'direkt' att $s = -1$ är en pol.
Faktorisera nämnaren: $s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = (s+1)(s^2 + as + b)$.
Sök a och b.

$$\begin{aligned}(s+1)(s^2 + as + b) &= s^3 + as^2 + bs + s^2 + as + b \\ &= s^3 + (a+1)s^2 + (a+b)s + b = \\ &= s^3 + 3s^2 + 4s + 2\end{aligned}$$

Vi ser att $b = 2$ som ger $a = 2$. Sök poler från $s^2 + 2s + 2 = 0$.
$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm j$. Komplexa poler. Behåll andragradspolynomet. PBU.

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{3}{(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2} \\ 3 &= A(s^2+2s+2) + (s+1)(Bs+C) = \\ &= A(s^2+2s+2) + Bs^2 + s(B+C) + C\end{aligned}$$

$$\begin{cases} s^0: & 3 = 2A + C \\ s^1: & 0 = 2A + B + C \\ s^2: & 0 = A + B \qquad\qquad \text{med lösning} \quad A = 3\ , \quad B = C = -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{3}{s+1} - \frac{3s+3}{s^2+2s+2} = \text{(kvadratkomplettera)} \\ &= 3\left(\frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)\end{aligned}$$

Invers Laplacetransform ger impulssvaret

$$h(t) = 3\,e^{-t}(1 - \cos(t))u(t)$$