Tentamen SSY043
Signaler och System, Z2

Lösningsförslag

17 mars 2022 kl. 14:00-18.00

1. (a) Ett diskret LTI-system har följande stegsvar

$$y_s[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ (1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n = 0, 1, 2, 3 \\ 1, & n \geq 4. \end{cases}$$

Insignal $x[n]$	Utsignal $y[n]$
Impuls $\delta[n]$	$h[n]$ Impulssvar
Enhetssteg $u[n]$	$y_s[n]$ Stegsvar
$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$	$h[n] = y_s[n] - y_s[n-1]$

Vilket ger

n	0	1	2	3	4	5	6
$y_s[n]$	0	1/2	3/4	7/8	1	1	1
$-y_s[n-1]$	0	0	-1/2	-3/4	-7/8	-1	-1
Summera	-	-	-	-	-	-	-
$h[n]$	0	1/2	1/4	1/8	1/8	0	0

$$h[n] = \begin{cases} 0 \cdot \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2] + \frac{1}{8}\delta[n-3] + \frac{1}{8}\delta[n-4] \\ 0, \quad \text{för} \;\; n < 0 \;\; \text{och} \;\; n \geq 5 \;. \end{cases}$$

Följande samband kan också användas

$$y_s[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]$$

(b)

$$g(t) * \delta(t - t_o) = g(t - t_o) \qquad (i)$$

$$g(t)\delta(t - t_o) = g(t_o)\delta(t - t_o) \qquad (ii)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - t_o)\delta(\tau)d\tau = g(-t_o) \qquad (iii)$$

2. Beräkna systemets frekvenssvar

$$
\begin{aligned}
H(s) =& \frac{s\,1000}{(s+100)(s+400)} = \{s = j\omega\} = \frac{j\omega\,1000}{(j\omega+100)(j\omega+400)} = \\
=& \frac{j\omega\,1000}{(-\omega^2 + j400\,\omega + j100\,\omega + 40000)} = \\
=& \frac{j\omega\,1000}{(40000-\omega^2) + j500\,\omega} = H(j\omega)
\end{aligned}
$$

Fasvinkeln $\phi = 0$ om $H(j\omega)$ är reellt. Vi ser att då $(40000-\omega^2) = 0$ blir $H(j\omega) = \frac{1000}{500} = 2$. Alltså är $\omega_\phi = \sqrt{40000} = 200$ rad/s.

$$
y(t) = |H(j\omega)| \cdot 2\cos(\omega t + \arg\{H(j\omega\}) = \{\omega = 200\} = 4\cos(200\,t)
$$

a) $\omega_\phi = 200$ rad/s , b) A=4

3. Differensekvationen

$$
\begin{aligned}
y[n] - 0.25y[n-1] &= 2x[n] - x[n-1] \quad z\text{-transformera} \\
Y(z)(1 - 0.25z^{-1}) &= X(z)(2 - z^{-1}) \quad \text{bilda kvot} \\
H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1}}
\end{aligned}
$$

Insignal

$$
x[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad \longleftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 + 0.25z^{-1}}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(z) = H(z)X(z) &= \frac{2 - z^{-1}}{(1 - 0.25z^{-1})(1 + 0.25z^{-1})} = \\
&= z \cdot \frac{2z - 1}{(z - 0.25)(z + 0.25)}
\end{aligned}
$$

Gör PBU på

$$
\begin{aligned}
&\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z - 1}{(z - 0.25)(z + 0.25)} = \frac{A}{z - 0.25} + \frac{B}{z + 0.25} \\
&2z - 1 = A(z + 0.25) + B(z - 0.25) \\
&\qquad z = 0.25 \quad \Rightarrow \quad -0.5 = A(0.5) \quad \Rightarrow \quad A = -1 \\
&\qquad z = -0.25 \quad \Rightarrow \quad -1.5 = B(-0.5) \quad \Rightarrow \quad B = -3
\end{aligned}
$$

Och

$$
Y(z) = 3\frac{z}{z + 0.25} - \frac{z}{z - 0.25}
$$

Invers z-transformering ger

$$
y[n] = \left[3\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n]
$$

4. Laplacetransformera impulssvaret

$$h(t) = 2(\delta(t) - 4e^{-t}\sin(4t))u(t)$$

$$H(s) = 2\left(1 - 4\frac{4}{(s+1)^2+16}\right) = 2\left(1 - \frac{16}{(s+1)^2+16}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{(s+1)^2+16-16}{(s+1)^2+16} = 2 \cdot \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+16}$$

Insignal

$$x(t) = 2e^{-t}u(t) \quad \longleftrightarrow \quad X(s) = \frac{2}{s+1}$$

Utsignalens Laplacetransform

$$Y(s) = H(s)X(s) = \cdots = 4 \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2+16}$$

Invers Laplacetransform ger

$$y(t) = 4e^{-t}\cos(4t)u(t)$$

5. Index k motsvarar frekvenserna $f_k = \frac{f_s}{N} k$ Hz. Med N=256 och samplingsfrekvensen $f_s = 6300$ Hz.

I figur 2 ser vi tydliga toppar i $|X[k]|$ vid

$$k = 38 \qquad \Rightarrow \qquad f_{38} = \frac{6300}{256} 38 = 935 Hz$$

$$k = 54 \qquad \Rightarrow \qquad f_{54} = \frac{6300}{256} 54 = 1329 Hz$$

Frekvensskillnad mellan $X[k]$ och $X[k+1]$ är
$\triangle f = \frac{f_s}{N} = \frac{6300}{256} = 24.6$ Hz.

Jämför f_{38} och f_{54} mot DTMF-Tabellen [1].

$k = 38$	$f_{38} = 935$ Hz	$f_{lo} = 941$	$f_{lo} - f_{38} = 6 < \frac{\triangle f}{2} = 12.3$	Ok
$k = 54$	$f_{54} = 1329$ Hz	$f_{hi} = 1336$	$f_{hi} - f_{54} = 7 < \frac{\triangle f}{2} = 12.3$	Ok

Svar: a) Knapp **0** svarar bäst mot f_{38} och f_{54}. b) 24.6 Hz

(De två topparna i $|X[k]|$ för höga k-värden svarar mot $N - k$ värden. Uppkommer alltid för reella signaler.)

[1] alla frekvenser finns inte representerade i sekvensen $X[k]$