Sensorer, Signaler & System
SSY041B 2010-03-09

1) Stegsvar: Insignal $x_s(t) = u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_s(s) = \frac{1}{s}$

Utsignal $y_s(t) = 2(1 - e^{-at})u(t)$

Laplacetransformera: $y_s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y_s(s) = 2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) =$

$$= \frac{2(s+a-s)}{s(s+a)} = \frac{2a}{s(s+a)}$$

Systemets överföringsfunktion

$$H(s) = \frac{Y_s(s)}{X_s(s)} = \frac{2a}{s(s+a)} \cdot \frac{s}{1} = \frac{2a}{s+a}$$

a) $x(t) = u(t) - u(t-2)$

$$\Rightarrow y(t) = y_s(t) - y_s(t-2) =$$
$$= 2(1 - e^{-at})u(t) - 2(1 - e^{-a(t-2)})u(t-2)$$

b) $x(t) = 4\cos(at)\,u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = 4\frac{s}{s^2+a^2}$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{2a \cdot 4s}{(s+a)(s^2+a^2)} = \frac{As+B}{s^2+a^2} + \frac{C}{s+a}$$

$$8as = (As+B)(s+a) + C(s^2+a^2) = As^2 + s(Aa+B) + Ba + s^2C + Ca^2$$

s^2: $0 = A + C$
s^1: $8a = Aa + B$
s^0: $0 = Ba + Ca^2$

Lös ekv. syst. $\Rightarrow$ $A = 4$, $C = -4$, $B = 4a$

$$Y(s) = 4\frac{s}{s^2+a^2} + 4\frac{a}{s^2+a^2} - \frac{4}{s+a}$$ Inv. Laplace ger

$$y(t) = 4(\cos at + \sin at - e^{-at})u(t)$$

2/ $y[n]+0{,}3\,y[n-1]-0{,}04\,y[n-2]=x[n]+x[n-1]$

z-transformera

$$Y(z)\left[1+0{,}3z^{-1}-0{,}04z^{-2}\right]=X(z)(1+z^{-1})$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1+0{,}3z^{-1}-0{,}04z^{-2}}=\frac{z(z+1)}{z^2+0{,}3z-0{,}04}$$

Poler: $z_{1,2}=-0{,}15\pm\sqrt{0{,}15^2+0{,}04}=\begin{cases}-0{,}40\\+0{,}10\end{cases}$

b/ Stabilt? JA! Poler innanför EC.

a/ $$H(z)=\frac{z(z+1)}{(z+0{,}40)(z-0{,}10)}$$

Insignal $x[n]=2(-0{,}4)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)=\frac{2}{1+0{,}4z^{-1}}=\frac{2z}{z+0{,}4}$

Utsignal $Y(z)=H(z)X(z)$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{2z(z+1)}{(z+0{,}40)^2(z-0{,}10)}=\{\text{P.B.U.}\}=\frac{A}{z+0{,}40}+\frac{B}{(z+0{,}40)^2}+\frac{C}{z-0{,}10}$$

$$Y(z)=A\frac{z}{z+0{,}4}+\frac{B}{(-0{,}40)}\frac{z(-0{,}40)}{(z+0{,}40)^2}+C\frac{z}{z-0{,}10}$$

$$y[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}=\left[A\cdot(-0{,}4)^n-\frac{B}{0{,}40}\cdot n(-0{,}4)^n+C(0{,}10)^n\right]u[n]$$

Beräkna konstanter:

$$2z^2+2z=A(z+0{,}40)(z-0{,}10)+B(z-0{,}10)+C(z+0{,}40)^2$$

$$2z^2+2z=A(z^2+0{,}30z-0{,}04)+B(z-0{,}10)+C(z^2+0{,}80z+0{,}16)$$

z^2: $2=A+C$

z^1: $2=0{,}30A+B+0{,}80C$

z^0: $0=-0{,}04A-0{,}10B+0{,}16C$

Löst ekv. system ger

$A=1{,}12$, $B=0{,}96$, $C=0{,}88$

SSY041B
10 03 09

3/

$$h[n] = 2\delta[n-2] - 4\delta[n-3] - 4\delta[n-4] + 2\delta[n-5]$$

Z-transformera!

$$H(z) = 2z^{-2} - 4z^{-3} - 4z^{-4} + 2z^{-5}$$

Frekvenssvar: $H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega})$

$$H(e^{j\Omega}) = 2e^{-j2\Omega} - 4e^{-j3\Omega} - 4e^{-j4\Omega} + 2e^{-j5\Omega} =$$

$$= 2e^{-j\frac{7}{2}\Omega}\left(e^{j\frac{3}{2}\Omega} - 2e^{j\frac{1}{2}\Omega} - 2e^{-j\frac{1}{2}\Omega} + e^{-j\frac{3}{2}\Omega}\right) =$$

$$= 2e^{-j\frac{7}{2}\Omega}\left[2\cos\left(\frac{3}{2}\Omega\right) - 4\cos\left(\frac{1}{2}\Omega\right)\right] =$$

$$= e^{-j\frac{7}{2}\Omega} \cdot 4\left(\cos\frac{3\Omega}{2} - 2\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right) =$$

$$= e^{-j\frac{7}{2}\Omega} \cdot H_r(\Omega) \quad \text{där } H_r(\Omega) \text{ är reell}$$

Amplitudkarakteristik:

$$|H(e^{j\Omega})| = |H_r(\Omega)| = 4\left|\cos\left(\frac{3\Omega}{2}\right) - 2\left(\cos\frac{\Omega}{2}\right)\right|$$

Faskarakteristik: $\Phi(\Omega) = \arg\{H(e^{j\Omega})\} =$

$$= -\frac{7}{2}\Omega + \Theta$$

$$\Theta = \begin{cases} 0 & \text{för } H_r(\Omega) \geq 0 \\ -\pi & \text{för } H_r(\Omega) < 0 \end{cases}$$

SSY 041 B
100309

4/ Samplingsfrekvens $f_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}2\cdot 10^{-3}} = 5000\,Hz$

$2000 < \frac{5000}{2}$ Ingen aliasing.

En reell sinusformad signal ger två "toppar" i $|X[k]|$

Frekv. f_1 $\quad k_1 = 3$ och $N - k_1 = 32 - 3 = 29$

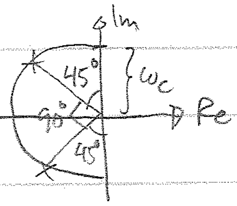
 f_2 $\quad k_2 = 7$ och $N - k_2 = 32 - 7 = 25$

$$f_1 = \frac{f_s}{N}\cdot k_1 = \frac{5000}{32}\cdot 3 = \frac{625\cdot 3}{4}\ Hz \quad ; \ \omega_1 = 2\pi f_1$$

$$f_2 = \frac{f_s}{N}\cdot k_2 = \frac{5000}{32}\cdot 7 = \frac{625\cdot 7}{4}\ Hz \quad , \ \omega_2 = 2\pi f_2$$

$$X(t) = 5\cos(\omega_1 t + \phi_1) + 5\cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad , \ \phi_1 \text{ och } \phi_2 \text{ okända}$$

Butterworth LP filter $\quad \omega_c = 700\cdot 2\pi$ r/s , $n = 2$



$$s_1 = -\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} + j\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} = s_2^*$$

$$H(s) = \frac{K}{(s-s_1)(s-s_2)} \qquad s_1 s_2 = s_1 s_1^* = |s_1|^2$$

$$H(s) = \frac{K}{(s^2 - s(s_1+s_2) + s_1 s_2} = \frac{K}{s^2 + s\sqrt{2}\,\omega_c + \omega_c^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{\omega_c^2 - \omega^2 + j\omega\sqrt{2}\,\omega_c} \qquad \text{Max först} = 1 \text{ då } \omega \to 0 \Rightarrow K = \omega_c^2$$

Vi vet att $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}}$ $\quad \arg\{H(j\omega)\} = -\arctan\frac{\omega\sqrt{2}\,\omega_c}{\omega_c^2 - \omega^2}$

Utsignal: $y(t) = 5|H(j\omega_1)|\cos(\omega_1 t + \phi_1 + \theta_1) + 5|H(j\omega_2)|\cos(\omega_2 t + \phi_2 + \theta_2)$

med $|H(j\omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{625\cdot 3\,2\pi}{4\cdot 700\cdot 2\pi}\right)^4}} \approx 0{,}91$ $\quad | \quad \theta_1 = \arg\{H(j\omega_1)\} \approx -59{,}8^\circ$

$\theta_2 = \arg\{H(j\omega_2)\} \approx -123^\circ$

$H(j\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{625\cdot 7\cdot 2\pi}{4\cdot 700\,2\pi}\right)^4}} \approx 0{,}38$

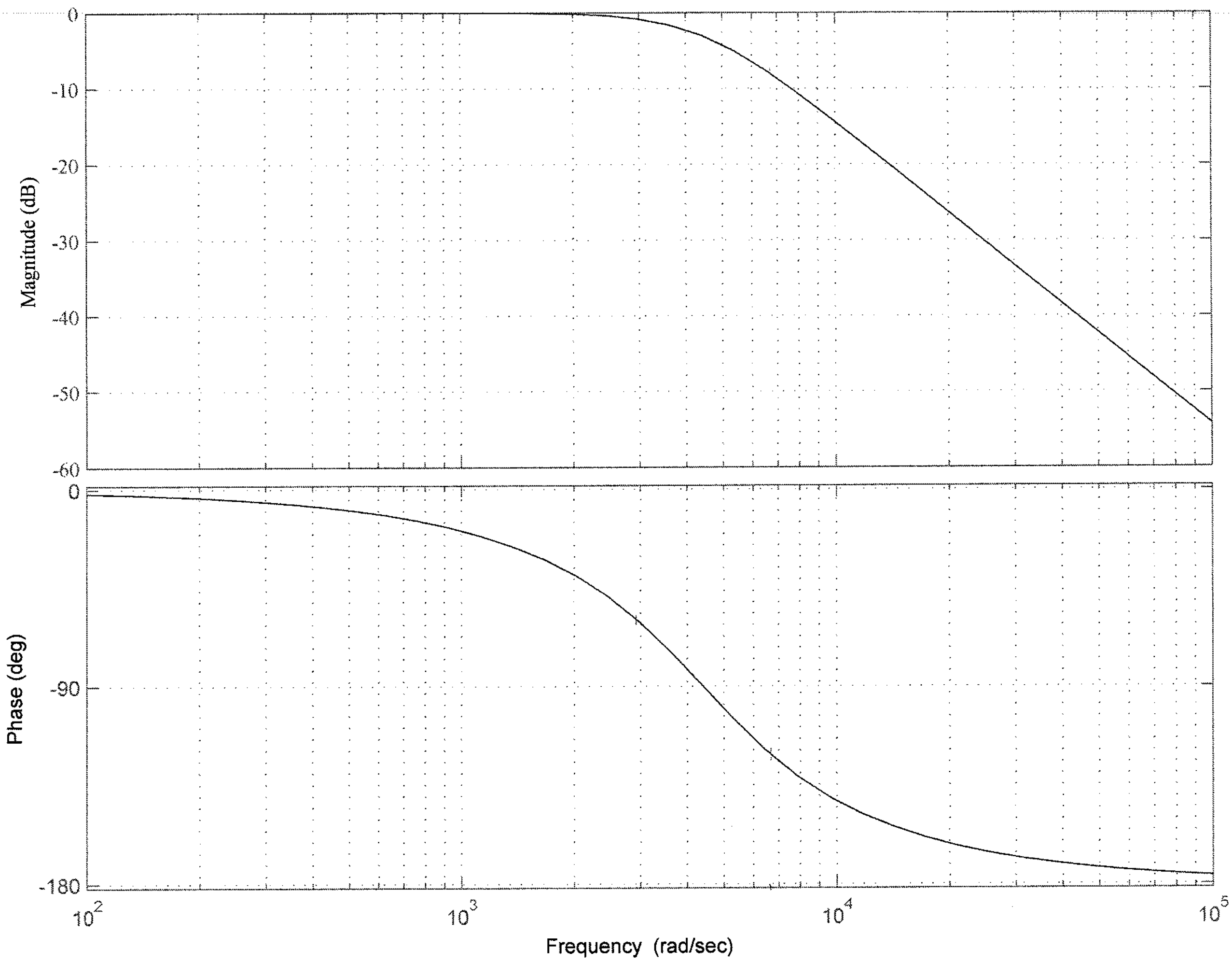
ϕ_1 och ϕ_2 okända

4/

SS4041B

100309

Bode Diagram



Bedömningsmall: Tentamensuppgift för mätteknikdelen i Sensorer, signaler och system 2010–03–09

5. (a) Medelvärdet och den observerade standardavvikelse beräknas till 58,0 repektive 12,0 cm **(1 p)**.
Eftersom vi skattar standardavvikelsen samtidigt med medelvärdet ur en begränsad datamängd på 10 mätningar används t-fördelningen.
Det 90-procentiga konfidensintervallet fås ur t-fördelningstabellen, i detta fall med 9 frihetsgrader **(1 p)**:

$$58,0 \pm t_p \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 58,0 \pm 1,83 \cdot \frac{12,0}{\sqrt{10}} = 58,0 \pm 7,0 \qquad \mathbf{(1\ p)}$$

(b) Vi använder proportionaliteten och kombinerar de två sambanden med den antagna och den verkliga emissiviteten (som ju båda skall resultera i samma effekt P):

$$\frac{P}{P} = \frac{\varepsilon_{ant} \cdot T_{ant}^4}{\varepsilon_{verk} \cdot T_{verk}^4}$$

Sätt in värdena och vi får:

$$1 = \frac{0,75 \cdot (273 - 2)^4}{0,99 \cdot (273 + t_{verk})^4}$$

vilket ger den verkliga temperaturen $t_{verk} = -20°\mathrm{C}$ **(1 p)**
Våglängsdområdet är vanligtvis i det kortvågiga infraröda området, approximativt 1–10 μm **(1 p)** (se t.ex. kompendiet sidan G48).

Sensorer, Signaler & System
SSY041B 100825

1.

$$\underset{X(s)}{x(t)} \longrightarrow \boxed{H_1(s)} \longrightarrow \boxed{H_2(s)} \longrightarrow \underset{Y(s)}{y(t)}$$

$$Y(s) = H_1(s)H_2(s)X(s)$$

$$x(t) = 6e^{-3t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) = \frac{6}{s+3}$$

$$H_1(s) = \frac{4}{s+2}$$

Stegsvar till H_2: $y_2(t) = (1-e^{-5t})u(t)$

$\mathcal{L}\{u(t)\}$

$$y_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+5} = \frac{s+5-s}{s(s+5)} = \frac{5}{s(s+5)} = \frac{1}{s}\cdot H_2(s)$$

$$\therefore H_2(s) = \frac{5}{s+5}$$

$$Y(s) = \frac{4}{(s+2)}\cdot\frac{5}{(s+5)}\cdot\frac{6}{s+3} = \{\text{P.B.U.}\} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+5} + \frac{C}{s+3}$$

$$A = \frac{4\cdot5\cdot6}{(-2+5)(-2+3)} = \frac{4\cdot5\cdot6}{3} = 40$$

$$B = \frac{4}{(-3)}\cdot\frac{5\cdot6}{(-2)} = 20 \quad ; \quad C = \frac{4\cdot5\cdot6}{(-1)(+2)} = -60$$

$$Y(s) = \frac{40}{s+2} + \frac{20}{s+5} - \frac{60}{s+3} \qquad \text{Inverstransformera}$$

$$y(t) = 20(2e^{-2t} + e^{-5t} - 3e^{-3t})u(t)$$

SS4041 B
10 0825

2. $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-1]$

skriv om

$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$

Förskjutning "(n-1)".

a) Z-transformera!

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + 2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}} + \frac{2}{z-\frac{1}{2}} = \frac{z\left(z-\frac{1}{2}\right)+2\left(z-\frac{1}{3}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{z^2 + z\left(2-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}}{z^2 - z\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}} = \frac{z^2 + z\cdot\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{z^2 - z\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}}$$

eller

$$H(z) = \frac{1+\frac{3}{2}z^{-1}-\frac{2}{3}z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

b) $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z)\left(1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}\right) = X(z)\left(1+\frac{3}{2}z^{-1}-\frac{2}{3}z^{-2}\right)$

Inv. z-transform

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] + \frac{3}{2}x[n-1] - \frac{2}{3}x[n-2]$$

SSY041B
100825

3.

Allmänt: $x[n]$ en viktad summa av diskreta komplexa exponentialer : $X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad , n = 0,1,\ldots,N-1$$

a)

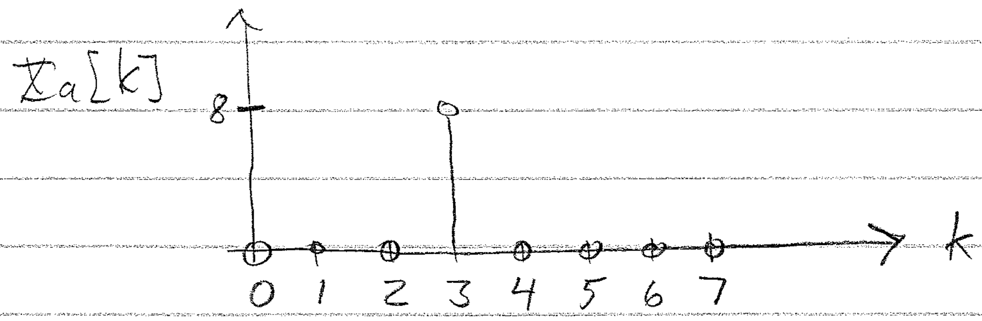
$$x_a[n] = e^{j\frac{6\pi n}{8}} = e^{j\frac{2\pi}{8}\cdot 3\cdot n} \quad , n = 0,1,2,\ldots,7$$

Vi ser att $N=8$ och $k=3$

$$x_a[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_a[k]e^{j\frac{2\pi}{8}\cdot k\cdot n} = e^{j\frac{2\pi}{8}\cdot 3\cdot n}$$

Endast $k=3$ är nollskild $x_a[n] = \frac{X_a[3]}{8} e^{j\frac{2\pi}{8}3\cdot n}$

$\therefore$ $X_a[3] = 8$, övriga $X_a[k] = 0$ för $k = 0,1,2,4,5,6,7$



/forts

SSY041B

100825

Uppg 3

b)

$$x_b[n] = e^{-j\frac{4\pi n}{8}} = e^{j\frac{2\pi}{8}(-2)n}$$

$x_b[n]$ periodisk med $N=8$

Multipliera med $1 = e^{j\frac{2\pi}{8}\cdot 8}$

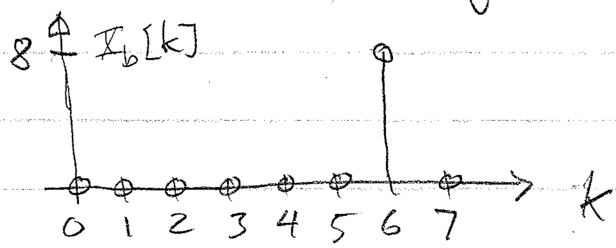
$$x_b[n] = e^{j\frac{2\pi}{8}(-2)\cdot n} \cdot e^{j\frac{2\pi}{8}\cdot 8} = e^{j\frac{2\pi}{8}(-2+8)n} =$$

$$= e^{j\frac{2\pi}{8}\cdot 6\cdot n}$$

$$x_b[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_b[k]\, e^{j\frac{2\pi}{8}\cdot k\cdot n} = \{N=8\} = e^{j\frac{2\pi}{8}\cdot 6\cdot n}$$

Endast termen $k=6$ är nollskild, jämför uppg. a)

$\therefore$ $X_b[6] = 8$, övriga $X_b[k] = 0$, $k = 0,1,2,3,4,5,7$



c)

$T = 10\,ms$ Sampl. frekv. $f_s = \frac{1}{T}$ Sampl. vinkelfrekv $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

Frekvensupplösning $\Delta\omega = \frac{\omega_s}{N} = \frac{2\pi}{256\cdot 0{,}010} =$

$$= \frac{200\pi}{256} \approx 2.45 \text{ rad/s}$$

SSY041 B

100825

4. Impulssvar $h[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1]$

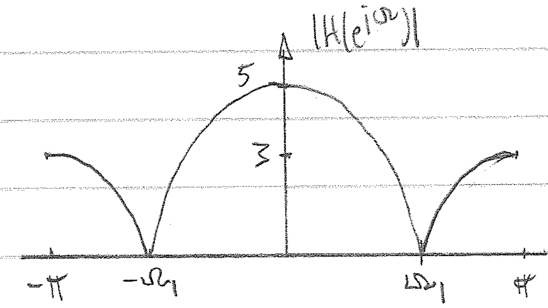
z-transformera $H(z) = 2z + 1 + 2z^{-1}$

Frekv. svar $H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega}) = 2e^{j\Omega} + 1 + 2e^{-j\Omega}$

$$H(e^{j\Omega}) = 1 + 4 \cdot \frac{e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}}{2} = 1 + 4\cos\Omega$$

a) Amplitudkarakteristik

$$|H(e^{j\Omega})| = |1 + 4\cos(\Omega)|$$



$H(e^{j\Omega}) = 0$ då $\cos\Omega = -\frac{1}{4}$ $\Rightarrow \Omega = \Omega_1 = \pm 1{,}82$ rad $=$

$= \pm 0{,}58\,\pi$ rad

b) Faskarakteristik

$$\arg\{H(e^{j\Omega})\} = \begin{cases} 0, & H(e^{j\Omega}) \geq 0 \quad ; \quad |\Omega| \leq \Omega_1 \\ -\pi, & H(e^{j\Omega}) < 0 \quad ; \quad \Omega_1 < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

SSY041 B

100825

Bedömningsmall: Tentamensuppgift för mätteknikdelen i Sensorer, signaler och system 2010–08–25

---

5. (a) Medelvärdet för de tio observationerna blir 12,415 V, och den tillhörande standardavvikelsen runt medelvärdet blir 0,112 V.

   Mätosäkerheten enligt databladet (säkra gränser) för ett specifikt instrument vid en mätning av 12,4 V är ±0,060 V.

   Vi noterar att Fluke75 nummer 7 ger ett alldeles för högt värde, och förkastar detta från fortsatt analys, med motiveringen att den uppfyller inte specifikationerna enligt databladet **(1 p)**.

   Vi gör om analysen av medelvärde och standardavvikelse för de andra 9 multimetrarna. Medelvärdet blir 12,380 V. Den tillhörande standardavvikelsen runt medelvärdet blir 0,017 V.

   Enligt t-fördelningstabell fås faktorn t_p till 3,35 för 99% konfidens och 8 frihetsgrader (används 10 mätningar, d.v.s. 9 frihetsgrader, fås 3,25) **(1 p)**.

   Vilket ger det 99-procentiga konfidensintervallet: 12,380±0,018 V (används standardavviklesen och t_p faktorn för 10 mätningar, fås osäkerhetsintervallet 12,415 ± 0,115) **(1 p)**.

   (b) Töjningsgivararna anslutes lämpligtvis i en bryggkoppling i form av en halvbrygga **(1 p)**.

   Korrekt kopplingsschema för t.ex. en Wheatstonebrygga där de två sensorerna sitter i samma bryggarm **(1 p)**.

SSY041 - B
2011-01-11

1/ Stegsvar $Y(s) = \frac{1}{s} \cdot H(s)$

Impulssvar $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{2 \cdot 5000 \cdot \frac{5000}{(s+5000)^2 + 5000^2}\right\} =$

$$= 10\,000\, e^{-5000t} \sin(5000t) \cdot u(t)$$

2/ $H(z) = \ldots = 1 + 0{,}8z^{-1} - z^{-2} - 0{,}8z^{-3}$

a/ $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \delta[n] + 0{,}8\delta[n-1] - \delta[n-2] - 0{,}8\delta[n-3]$

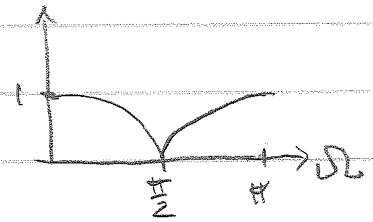
$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$

Superpos. ger $y[n] = h[n] + h[n-1] + h[n-2] =$

$$= \{\ldots, 0, 0, 0, \underset{n=0}{\underline{1}}, 1.8, 0{,}8, -1, -1{,}8, -0{,}8, 0, 0, \ldots\}$$

3/ $H(z) = z^{-1} + z^{-3} = z^{-2}(z + z^{-1})\Big|_{z=e^{j\Omega}} = e^{-j2\Omega}(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega})$

$|H(e^{j\Omega})| =$
$= 2|\cos\Omega|$



$\sin(\omega t) = \{\text{Sampling}\} = \sin(\omega n T) = \sin(\Omega n)$

Sök T för $\Omega = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow T = \frac{\Omega}{\omega} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$

4/ X_1 – B
X_2 – A
X_3 – B

SSY041B
2011-01-11

Bedömningsmall: Tentamensuppgift för mätteknikdelen i Sensorer, signaler och system 2011–01–11

---

5 (a) De slumpmässiga felens inverkan minskas med hjälp av medelvärdesbildning. Ett medelvärde representerar mätstorheten under den tid som medelvärdesbildningen sker. Denna tid blir alltså mätningens tidsupplösning, och skall denna vara hög, skall vi inte medelvärdesbilda under längre tid än nödvändigt **(1 p)**.

Det 99-procentiga konfidensintervallet fås ur normalfördelningstabellen ($k = 2,58$ **(1 p)**). Då det var givet att standardavviklesen σ var 3,3 m. och att kravet var att konfidensintervallet skall motsvara en mätosäkerhet på 0,5 m, fås villkoret för hur många mätningar, n, som skall medvärdesbildas:

$$k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,58 \cdot \frac{3,3}{\sqrt{n}} = 0,5 \text{ [m]} \qquad \textbf{(1 p)}$$

Vi finner att $n = 290$. Med en samplingsfrekvens på 100 Hz, får vi då en tidsupplösning på 2,9 s **(1 p)**.

(b) Fördelar med en resistiv positionssensor är dess pris, samt att resistans kan mätas noggrannt på ett enkelt sätt. Nackdel är förslitningen på grund av att en (släp)kontakt rör sig över en resistiv bana, emedan en induktiv sensor kan göras beröringsfri **(1 p)**.