Anonym kod	TMV122/177 Inledande Matematik Z/TD 2019-01-08	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+4^{x+1}}{4^x+2^{x+1}}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(x^2+1)}{1-\cos(\pi x)}$

Lösning:

i) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+4^{x+1}}{4^x+2^{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{4^x}\left(\overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^x}^{\to 0}+4\right)}{\cancel{4^x}\left(1+2\underbrace{\left(\frac{2}{4}\right)^x}_{\to 0}\right)}$$

$$= \left\{\frac{3}{4}<1,\ \frac{2}{4}<1\right\} = \frac{0+4}{1+2\cdot 0} = 4$$

ii) $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x^2+1)}{1-\cos\pi x}\ \left[\frac{0}{0}\right] = \{\text{l'Hôpital}\} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{\pi\sin\pi x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{\pi^2}\underbrace{\frac{2}{x^2+1}}_{\xrightarrow[x\to0]{}2}\ \underbrace{\frac{\pi x}{\sin\pi x}}_{\xrightarrow[x\to0]{}1} = \frac{2}{\pi^2}$$

Svar: i) 4   ii) $\frac{2}{\pi^2}$

(b) Tillståndet för en ideal gas ges av $pV = kT$ där p är trycket, V är volymen, T är temperaturen och k är en konstant. Betrakta en ideal gas i en sfärisk behållare med radie r och bestäm hur snabbt trycket sjunker då $\frac{dr}{dt} = 1$ m/s, $r = 1$ m och $p = 40$ kPa om expansionen antas vara isoterm, d.v.s. T hålls konstant. (3p)

Lösning:

Sökt: $\frac{dp}{dt}\Big|_{t=t_1}$ Givet: $\frac{dr}{dt}\Big|_{t=t_1} = 1\,m/s$

$r(t_1) = 1m$, $p(t_1) = 40kPa$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \quad (*)$$

Ideal gas $pV = kT$, T konst $\Rightarrow \frac{dT}{dt} = 0$

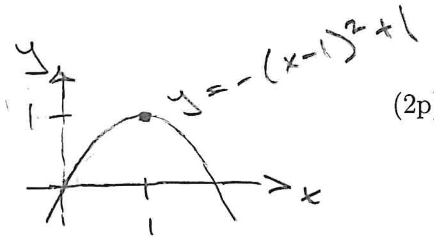
$$\frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{dp}{dt}V + p\frac{dV}{dt} = k\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{p}{V}\frac{dV}{dt} \overset{(*)}{=} -\frac{3p}{r}\frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt}\Big|_{t=t_1} = -\frac{3\cdot 40}{1}\cdot 1 = -120\ kPa/s$$

Svar: Trycket sjunker med 120 kPa/s

Var god vänd!

(c) Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = e^{-x^2+2x}$, $x \in \mathbb{R}$. (2p)



Lösning:

$$g(x) = -x^2+2x = -(x-1)^2+1$$

$$\Rightarrow V_g = (-\infty, 1]$$

$$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow \{e^x \text{ strängt växande}\} \Rightarrow V_f = (0, e]$$

Svar: $V_f = (0, e]$

(d) Bestäm alla värden för konstanten $a \in \mathbb{R}$ sådana att ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + a(a-1)y = a \end{cases}$$

saknar lösning.

Lösning:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a(a-1) & a \end{pmatrix} \xleftarrow{-1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \underbrace{a(a-1)-2} & a-2 \end{pmatrix}$$

$$= a^2-a-2 = (a-2)(a+1)$$

$\Rightarrow$ Lösning saknas då $a = -1$ eftersom vi då har $(0\ \ 0\ \ -3)$-rad $\Leftrightarrow$ $0 = -3$ etc.

Svar: Lösning saknas för $a = -1$

(e) Beräkna $f'(1)$ om $f(x) = \sin(\pi x + \arctan x)$. (2p)

Lösning:

$$f'(x) = \cos(\pi x + \arctan x) \cdot \left(\pi + \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$f'(1) = \cos(\pi + \underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}})\left(\pi + \frac{1}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\left(\pi + \frac{1}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Svar: $f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pi + \frac{1}{2}\right)$

(f) Bestäm vinkeln $\phi \in [0, \pi]$ mellan vektorerna $\vec{u} = (1, 3, -2)$ och $\vec{v} = (3, 2, 1)$. (2p)

Lösning:

$$\cos\phi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{1\cdot 3 + 3\cdot 2 - 2\cdot 1}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \phi = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

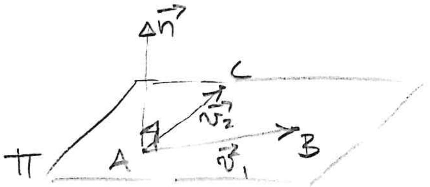
Svar: $\phi = \frac{\pi}{3}$

2a) Två vektorer i planet π ges av

$$\vec{v}_1 = \vec{B} - \vec{A} = (2,-2,1) - (1,1,0) = (1,-3,1)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{C} - \vec{A} = (1,5,-2) - (1,1,0) = (0,4,-2)$$

Normalen $\vec{n}$ till π uppfyller: $\vec{n} \perp \vec{v}_1$, $\vec{n} \perp \vec{v}_2$



$$\Rightarrow \vec{n} \parallel \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (2,2,4)$$

Längden av $\vec{n}$ irrelevant, väljer $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (1,1,2)$

$$\Rightarrow \pi: \ x + y + 2z = D_\pi$$

För att bestämma D_π behöver vi punkt i planet, välj tex $\vec{A} = (1,1,0)$

$$\Rightarrow D_\pi = \vec{n} \cdot \vec{A} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2$$

$$\Rightarrow \pi: \ x + y + 2z = 2$$

<u>Svar</u>: Planets ekvation är $\pi: x + y + 2z = 2$

b) Riktningsvektor för ℓ ges av

$$\vec{v} = \vec{E} - \vec{D} = (0,1,0) - (2,0,-3) = (-2,1,3)$$

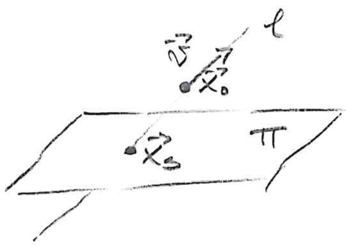
Väljer $\vec{x}_0 = \vec{E} = (0,1,0)$ som punkt på ℓ. Med $\vec{v} = (a,b,c)$ har vi skalärparametrisk form

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + at = -2t & \Rightarrow \quad t = -\frac{x}{2} \\ y = y_0 + bt = 1 + t & \Rightarrow \quad t = y - 1 \\ z = z_0 + ct = 3t & \Rightarrow \quad t = \frac{z}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ På standardform $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ har vi då

$$\ell : \quad -\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z}{3}$$

Skärningspunkt mellan ℓ och π:



$\pi : \quad x + y + 2z = 2$

Skalärparametrisk form $\Rightarrow \quad (-2t) + (1+t) + 2(3t) = 2$

$$\Rightarrow -2t + 1 + t + 6t = 2 \Rightarrow 5t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{5}$$

Skärningspunkten fås genom insättning av $t = \frac{1}{5}$ i ekvationen för ℓ:

$$\vec{x}_s = (-2t, 1+t, 3t) = \left(-\frac{2}{5}, 1+\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}(-2, 6, 3)$$

Svar: Linjens ekvation på standardform är $\ell : -\frac{x}{2} = y-1 = \frac{z}{3}$, och ℓ skär planet π i punkten $\vec{x}_s = \frac{1}{5}(-2, 6, 3)$

3) Rita grafen till $f(x) = x^2 e^{-x}$

Steg 1: $D_f = \mathbb{R} \Rightarrow$ Inga lodräta asymptoter.

Steg 2: $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$

$= x(2-x)e^{-x} = -x(x-2)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$ kritiska punkter

Steg 3: $f''(x) = (2-2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x}$

$= (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4-2}$

$= 2 \pm \sqrt{2}$

pot. infl. pkt.

$\Rightarrow f''(x) = (x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})e^{-x}$

Steg 4: $e^{-x} > 0 \quad \forall x \in D_f$

x		0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$	
f'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
f''	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f	$\searrow$ $\cup$	lokalt min	$\nearrow$ $\cup$	infl. pkt.	$\nearrow$ $\cap$	lokalt max	$\searrow$ $\cap$	infl. pkt.	$\searrow$ $\cup$

$f(0) = 0$ $\qquad$ $f(2) = \frac{4}{e^2}$

Steg 5: Asymptoter

I Lodräta: Inga lodräta asymptoter.

II Vågräta:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = \infty$$

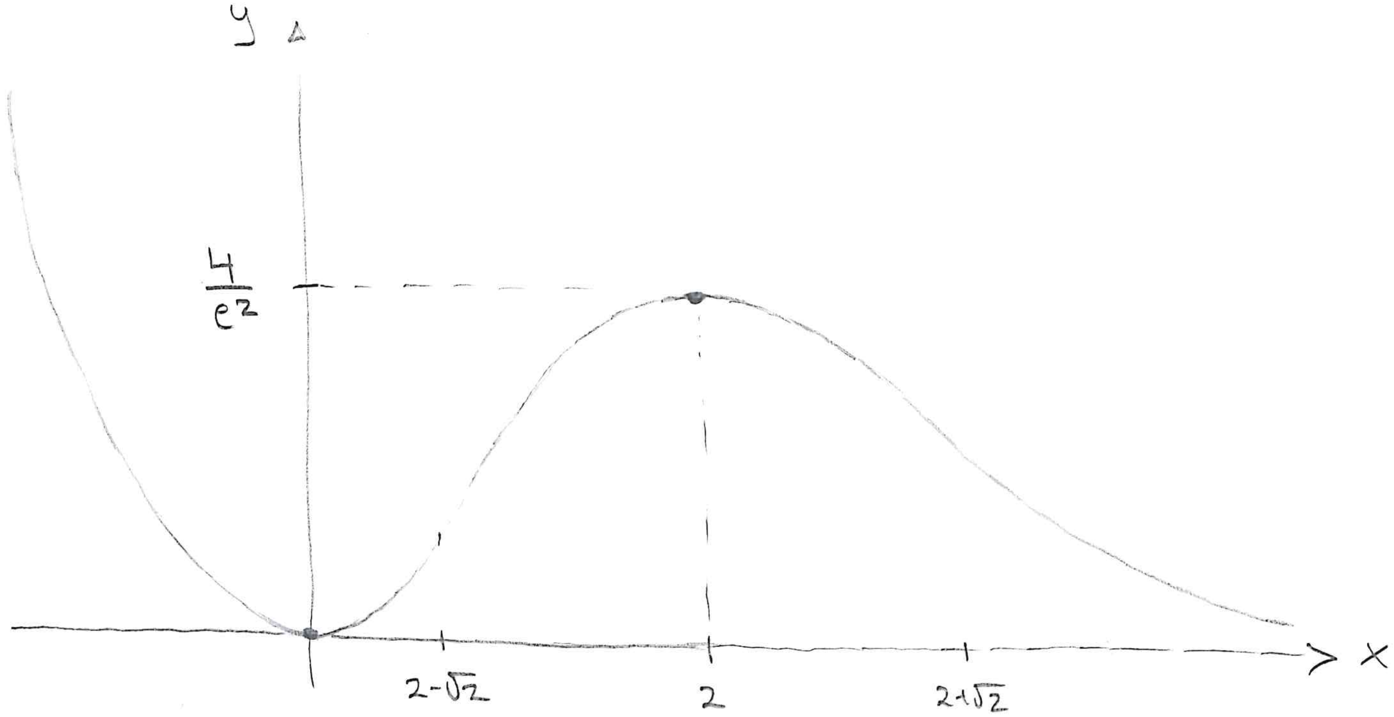
$\Rightarrow$ $y = 0$ vågrät asymptot då $x \to \infty$

III Sneda:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} x e^{-x} = -\infty$$

$\Rightarrow$ Ingen sned asymptot då $x \to -\infty$

Steg 6:



Extremvärden: Två extrempunkter

$x = 0$: $f(0) = 0$ globalt min

$x = 2$: $f(2) = \frac{4}{e^2}$ lokalt max

4) Låt $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x} = x^{-\ln x}$

$$= \left(e^{\ln x}\right)^{-\ln x} = e^{-(\ln x)^2}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = -2\ln x \cdot \frac{1}{x} \underbrace{e^{-(\ln x)^2}}_{=\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x}} = -2\ln x \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x + 1}}_{>0 \ \forall x > 0}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$f'(x) > 0$ för $x < 1 \Rightarrow f$ strängt växande

$f'(x) < 0$ för $x > 1 \Rightarrow f$ strängt avtagande

Låt $g(x) = \ln f(x) = \ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x}\right) =$

$$= \ln x \ln \frac{1}{x} = -(\ln x)^2$$

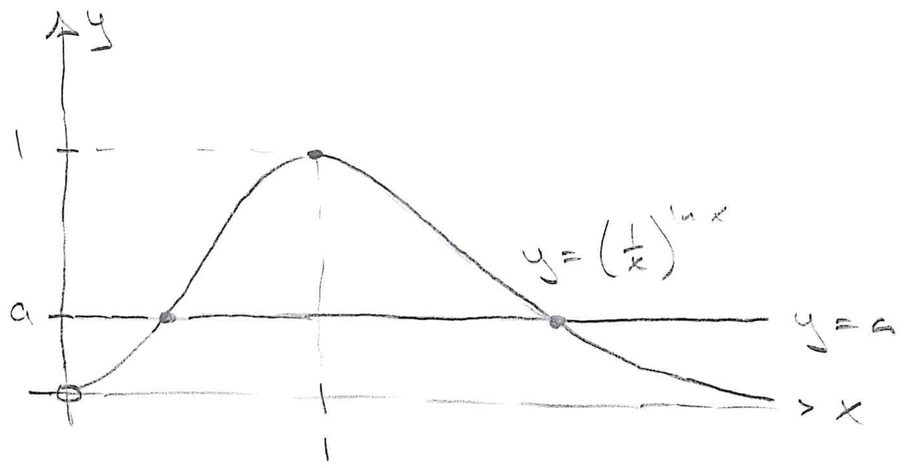
$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{g \to -\infty} e^g = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{g \to -\infty} e^g = 0$$

Vi har också $f(1) = 1^{\ln 1} = 1^0 = 1$

$\Rightarrow$ Vi kan nu skissa grafen för $f(x)$



Antalet lösningar till ekvationen $f(x) = a$ ges av antalet skärningspunkter mellan $y = f(x)$ och $y = a$.

$\Rightarrow$ $a > 1 \Rightarrow$ Inga lösningar

$a = 1 \Rightarrow$ 1 lösning

$0 < a < 1 \Rightarrow$ 2 lösningar

$a \leq 0 \Rightarrow$ Inga lösningar

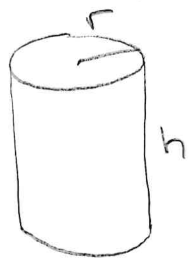
Svar: Ekvationen $\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x} = a$ har

1 lösning för $a = 1$

2 lösningar för $a \in (0, 1)$

Inga lösningar för $a \in (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$

5)



Volym: $V = \pi r^2 h$

Area: $A = 2\pi r h + 2 \cdot \pi r^2$

$r, h > 0$ $\quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2\pi r}\left(A - 2\pi r^2\right)$

Vi ser att $h > 0 \Rightarrow r < \sqrt{\frac{A}{2\pi}}$

$\Rightarrow$ Vi söker maximum på $r \in \left(0, \sqrt{\frac{A}{2\pi}}\right)$ för

$V(r) = \frac{\pi r^2}{2\pi r}\left(A - 2\pi r^2\right) = \frac{1}{2} A r - \pi r^3$

$V'(r) = \frac{1}{2} A - 3\pi r^2$

$V'(r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} A - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{A}{6\pi}$

$\Rightarrow \quad r = \overset{+}{(-)}\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ eftersom $0 < r < \sqrt{\frac{A}{2\pi}}$

$V''(r) = -6\pi r < 0 \quad \forall r > 0$

$\Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ lokalt max

$V\left(\sqrt{\frac{A}{6\pi}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6\pi}} \cdot A - \pi\left(\frac{A}{6\pi}\right)^{3/2}$

$= \frac{A^{3/2}}{\sqrt{6\pi}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\pi}\right) = \frac{A^{3/2}}{3\sqrt{6\pi}}$

Studera nu:

$$\lim_{r\to 0^+} V(r) = \lim_{r\to 0^+} \left(\tfrac{1}{2}Ar - \pi r^3\right) = 0$$

$$\lim_{r\to \sqrt{\frac{A}{2\pi}}^-} V(r) = \lim_{r\to \sqrt{\frac{A}{2\pi}}^-} \left(\tfrac{1}{2}Ar - \pi r^3\right) = \frac{1}{2}\frac{A^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} - \pi\left(\frac{A}{2\pi}\right)^{3/2} = 0$$

Vi ser att $V\left(\sqrt{\frac{A}{6\pi}}\right) > \max\left(\lim_{r\to 0^+} V(r), \lim_{r\to\sqrt{\frac{A}{2\pi}}^-} V(r)\right)$

$\Rightarrow \exists$ globalt max på $\left(0, \sqrt{\frac{A}{2\pi}}\right)$

$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ globalt max.

För $r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ har vi

$$h = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{6\pi}{A}\right)^{1/2}\left(A - 2\pi\frac{A}{6\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{6\pi}\sqrt{A}\underbrace{\left(1-\frac{1}{3}\right)}_{=\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{6\pi}\sqrt{A}}{3\pi} = \sqrt{\frac{2A}{3\pi}}$$

Svar: Den maximala volymen $\frac{A^{3/2}}{3\sqrt{6\pi}}$ ges för dimensionerna $r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ och $h = \sqrt{\frac{2A}{3\pi}}$.

6 a) Funktion f kontinuerlig i (inre) punkt $a \in D_f$

om $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ eller ekv. $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

b) Funktion f deriverbar i (inre) punkt

$a \in D_f$ om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ existerar.

c) Om f deriverbar i $a \in D_f$ existerar

gränsvärdet $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}$

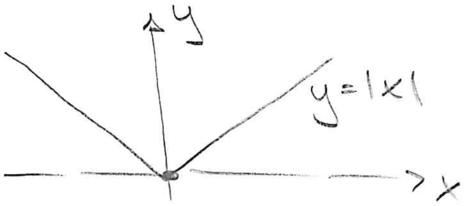
Från reglerna för gränsvärde följer

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} h + f(a) \right)$$

$$= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)$$

$\Rightarrow$ f kontinuerlig i a. ☒

d) $f(x) = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f \text{ kont. i } x=0$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} -\frac{h}{h} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$\Rightarrow$ f <u>inte</u> deriverbar i $x=0$

7 a) Se "Example 1" i kap. 2.5 i "Calculus" av Adams.

b) Se "Theorem 9" i kap 2.5 i "Calculus" av Adams.