MATEMATIK
Chalmers

Lösningar

1.(a) Sätt $z := x + iy$. Villkoren är att $x = 2y$ och $x^2 + y^2 = 5$. Dessa ekvationer har två lösningar $(x, y) = \pm(2, 1)$. Alltså finns det två komplexa tal som uppfyller villkoren, nämligen $\pm(2 + i)$.

(b) Eftersom $-1 \leq \cos x \leq 1$ för alla x så gäller att $1 \leq 3 + 2\cos x \leq 5$ för alla x. Så största och minsta värde för f är $\sqrt{5}$ resp. 1.

(c) Låt $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$. Jag ska härleda den ällmänna ekvationen som a, b, c måste uppfylla, även om bara ett exempel sökes och kan hittas på ett enklare sätt. Arean av triangeln med sidor $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ ges av $\frac{1}{2}|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$. Vi har

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -b\boldsymbol{i} + (a - c)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k},$$

sådan att

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + b^2 + (a - c)^2}.$$

Alltså är triangelns area lika med 1 om och endast om

$$2b^2 + (a - c)^2 = 4.$$

Då ser vi att det finns oändligt många möjligheter för $\boldsymbol{v}$. Det enklaste valet är nog $a = 2, b = c = 0$, dvs $\boldsymbol{v} = (2, 0, 0)$. Denna triangel är likbent, med bas av längd 2, ben av längd $\sqrt{2}$ och basvinklar $\pi/4$.

(d) Efter Gausselimination visar det sig att den tredje ekvationen är överflödig och att systemet kan reduceras till

$$2x + 3y = 5, \qquad -y + z = 1.$$

Låt z vara den fria variabeln, så får man en enparametrig lösning

$$\begin{cases} x &= 4 - 2t \\ y &= t - 1 \\ z &= t \end{cases}$$

(e) För **(i)** skriver vi om det givna uttrycket så här :

$$\frac{\sin 4x}{\tan 5x} = \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} \cdot \frac{4}{5}.$$

Då $x \to 0$ så går båda de två första kvoten mot ett, så svaret blir 4/5.

För **(ii)** så kan vi först utveckla täljaren till $x^2 - x - 1$. Vi får samma g.v. om vi bara tar kvotet mellan de högsta potenserna i täljaren och nämnaren, dvs $x^2/x^2 = 1$. Så svaret är 1.

För **(iii)** konstaterar vi att det givna kvotet har samma g.v. som $\frac{\ln x}{\ln x^2} = \frac{\ln x}{2 \ln x} = \frac{1}{2}$. Svar : 1/2.

(f) Deriverar vi implicit m.a.p. på x så får vi

$$-\sin x + \cos(f(x)) \cdot f'(x) = 0. \tag{1}$$

Deriverar man implicit en gång till får man

$$-\cos x - \sin(f(x)) \cdot [f'(x)]^2 + \cos(f(x)) \cdot f''(x) = 0. \tag{2}$$

Först innebär (1) att

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos(f(x))}.$$

Stoppa in $x = \pi/3$ så får vi då att

$$f'(\pi/3) = \frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/6)} = 1. \tag{3}$$

PSS, innebär (2) att

$$f''(x) = \frac{\cos x + \sin(f(x)) \cdot [f'(x)]^2}{\cos(f(x))}$$

Stoppa in $x = \pi/3$ och resultatet av (3) så erhålls

$$f''(\pi/3) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. (a) Låt $\boldsymbol{v} = \vec{AB}$ och $\boldsymbol{w} = \vec{AC}$. Då är $\boldsymbol{v} = (3-1)\boldsymbol{i} + (5-2)\boldsymbol{j} + (7-3)\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, och $\boldsymbol{w} = (1-1)\boldsymbol{i} + (5-2)\boldsymbol{j} + (5-3)\boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. Triangelns area ges av $\frac{1}{2}|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}|$. Vi beräknar först

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= [3 \cdot 2 - 4 \cdot 3)]\boldsymbol{i} - [(2 \cdot 2 - 4 \cdot 0]\boldsymbol{j} + [2 \cdot 3 - 3 \cdot 0]\boldsymbol{k} = -6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}.$$

Därmed är

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{22}.$$

(b) Vi söker alla vektorer av längd 5 som är parallella med $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$. Det finns två sådana vektorer och från (a) ser vi att de ges av

$$\pm\frac{5}{2\sqrt{22}}(-6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}) = \pm\frac{5}{\sqrt{22}}(-3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}).$$

(c) Låt $\boldsymbol{u} := 2\vec{AB} - \vec{AC} = 2(2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}) - (3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$. Skalärprojektionen av en godtycklig vektor $\boldsymbol{f} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ på denna ges av

$$\frac{\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}}{||\boldsymbol{u}||} = \frac{4a + 3b + 6c}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{4a + 3b + 6c}{\sqrt{61}}.$$

Alltså funkar vilken vektor som helst för vilken $4a + 3b + 6c = \frac{\sqrt{61}}{7}$. T.ex. tag $\boldsymbol{f} = \frac{\sqrt{61}}{28}\boldsymbol{i}$.

3. Notera att $f(x) \to 0$ då $x \to +\infty$ medan att $f(x) \to +\infty$ då $x \to -\infty$. Dessutom är $f(x) \geq 0$ för alla x ty $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ är en kvadrat och e^{-x} är alltid positiv.

   Allt detta medför direkt att värdemängden är $[0, \infty)$.

4. Notera att $x^2+6x+5 = (x+1)(x+5)$ är en parabel med rötter i $x = -1$ och $x = -5$ och ett minimum i $x = -3$. Tar vi absolutbeloppet så speglas den delen av parabeln mellan rötterna genom x-axeln till det övre halvplanet. Eftersom $\ln x$ är definierad bara för $x > 0$ och $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ så kommer f att ha lodrätta asymptoter i $x = -1$ och $x = -5$ och

$$\lim_{x\to -5\pm} f(x) = \lim_{x\to -1\pm} f(x) = -\infty.$$

   Dessutom kommer f att ha en lokal maximum i $x = -3$ där $f(-3) = \ln 4$ och det är klart att $f(x) \to +\infty$ då $x \to \pm\infty$. Så mycket räcker för att rita grafen.

5. Kalla radien för r och vinkeln i tårtbiten för θ. Då ges arean av $\frac{1}{2}r^2\theta$ så det är givet att

$$\frac{1}{2}r^2\theta = 1. \tag{4}$$

   Omkretsen är också en funktion av r och θ. Beteckna denna funktion med $f(r, \theta)$. Omkresten består av två radier och en cirkelbåge så vi har att

$$f(r, \theta) = 2r + r\theta. \tag{5}$$

   Men (4) medför att $\theta = 2/r^2$ så från (5) kan vi skriva omkretsen som en funktion av enbart r, nämligen

$$f(r) = 2r + 2/r = 2(r + 1/r).$$

Vi söker ett minimum för f, så vi ansätter

$$0 = f'(r) = 2(1 - 1/r^2),$$

som har den unika lösningen $r = 1$ ($r = -1$ är uppenbarligen inte en godtagbar lösning, ty radien måste vara positiv). Då ges den minsta omkretsen av $f(1) = 4$.

6.(a) Falskt. x_0 kan också vara en inflektionspunkt, t.ex. tag $f(x) = x^3$, $a = -1, b = +1$ och $x_0 = 0$.

(b) Sant. $z + \overline{z} = 2\Re(z)$ för alla z.

(c) Falskt, t.ex. tag $a = 0$ och

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x < 0, \\ -1, & \text{om } x \geq 0. \end{cases}$$

(d) Falskt. Snarare gäller att $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}$.

(e) Sant. Detta är en omformulering av faktumet att, för alla vinklar θ så gäller att $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

(f) Falskt, t.ex. samma funktion som i (c) ovan men med $f(0)$ lämnat odefinierat.

7.(a) Det innebär att f är definierad i någon öppen intervall I kring $x = x_0$ och att $f(x) \leq f(x_0)$ för alla $x \in I$.

(b) Se Sats 2, avsnitt 4.2 i Adams.

(c) T.ex. $f(x) = -|x - 3|$. Notera att denna f har faktiskt ett globalt maximum i $x = 3$.