MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för Z1, TMV120
Tid: 2007-01-19, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Peter Hegarty, Micke Persson, Lennart Falk
tel 0733-428321, 0762-721860, 0762-721861

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast 22/1 .
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Ange absolutbelopp och ett argument för vart och ett av de komplexa talen $3-4i$ och $-7+3i$. (2p)

   b) Ange alla reella x som uppfyller olikheten $(x+2)(x^2+x-6) \geq 0$. (2p)

   c) Beräkna $\sin \frac{\pi}{12}$. (2p)

   d) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y + 8z = -1 \\ 2x + 3y + z = 8 \end{cases}$$

   e) Ange följande gränsvärden: (3p)

   i. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x^2}{x^2+x^4}$ ii. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ iii. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3\ln x}{x+\ln x}$

   f) Låt $f(x) = x^3 + 2x$ och notera att f är en injektiv (one-to-one) funktion. Beräkna $(f^{-1})'(3)$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. En triangel har hörn i punkterna $A = (2,3,1)$, $B = (1,4,5)$ och $C = (3,0,-1)$. Bestäm triangelns area. Låt D vara mittpunkten på sidan BC i triangeln. Bestäm också skalärprojektionen av vektorn $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ på vektorn $\vec{AD}$. (6p)

3. Beräkna största och minsta värdet av funktionen $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4x+4}$ i intervallet $x \geq 0$. (6p)

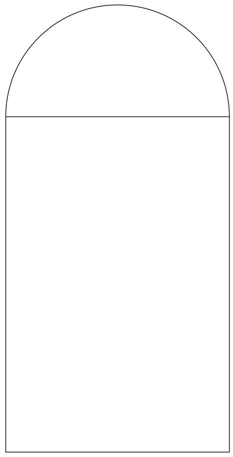
4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln(x^2+3x+3) - x$. (6p)
   Undersök eventuella lokala extrempunkter och asymptotiskt beteende. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

Var god vänd!

MATEMATIK
Chalmers

---

5. Ett tvådelat fönster består av en rektangulär klar glasskiva och en halv-cirkelformad färgad glasskiva (se fig). (6p)



Det färgade glaset släpper in hälften så mycket ljus som det klara. Om omkretsen av rektangeln är given, bestäm rektangelsidornas proportioner så att ljusinsläppet blir maximalt.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) För alla komplexa tal z och w gäller att $|z + w| \geq |z| + |w|$.

   b) $e^x > 1 + x$ för alla $x > 0$.

   c) Om f, g är deriverbara funktioner sådan att $f(x) > g(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ så gäller också att $f'(x) > g'(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

   d) Det finns minst ett reellt tal x sådan att $7x^{105} + 3x^{36} + 2x^{19} + 418 = 0$.

   e) Om $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är tre vektorer i ett och samma plan så gäller att $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

   f) Om $f(0) = f''(0) = 0$ så måste också $f'(0) = 0$.

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är kontinuerlig i en punkt a. (6p)

   b) Formulera satsen om mellanliggande värde för kontinuerliga funktioner (Intermediate Value Theorem).

   c) Låt f vara en kontinuerlig funktion från det slutna intervallet $[0, 1]$ till sig självt. Bevisa att det måste finnas minst en punkt $x \in [0, 1]$ sådan att $f(x) = x$.

   (TIPS : Betrakta $f(x) - x$).