MATEMATIK
Chalmers

Go n'eirí an bóthar libh !
/Peter

Lösningar

1.(a) $|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$. $\text{Arg}(3-4i) = \tan^{-1}(-\frac{4}{3})$, någon vinkel i den 4:e kvadranten.
PSS, $|7-3i| = \sqrt{(-7)^2+3^2} = \sqrt{58}$ och $\arg(-7+3i) = \tan^{-1}(-\frac{3}{7})$. Denna gång är vinkeln i den 2:a kvadranten, ty den reella delen av talet är negativ och den imaginära delen positiv.

(b) Notera att $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$ så olikheten blir till

$$(x+2)(x+3)(x-2) \geq 0.$$

För att en produkt av tre tal ska vara positiv så måste antingen (i) alla tre vara positiva eller (ii) två st vara negativa och det tredje positivt. Alternativ (i) gäller då $x \geq 2$. Alternativ (ii) gäller då $-3 \leq x \leq -2$. Sammanlagt så uppfylls olikheten alltså av $[-3,-2] \cup [2,\infty)$.

(c) Man använder följande fakta :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B,$$
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Därmed har vi att

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) &= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(d) Man ska lösa ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 3 \\ x & -y & +8z & = & -1 \\ 2x & +3y & +z & = & 8. \end{array}\right.$$

Det visar sig då att en av ekvationerna är överflödig och man får en enparametrig lösning (dvs de tre planen skär varandra i en linje):

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-5t \\ y & = & 2+3t \\ z & = & t \end{array}\right.$$

(e) För det 1:a g.v. gör vi så här :

$$\frac{\sin 4x^2}{x^2+x^4} = \frac{\sin 4x^2}{4x^2} \cdot \frac{4x^2}{x^2(1+x^2)} = 4 \cdot \frac{\sin 4x^2}{4x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Då $x \to 0$ så går båda kvoten till ett, så svaret blir 4.

För det 2:a g.v. noterar vi att om vi kvadrerar det givna uttrycket så får vi $\frac{x^2+1}{x^2+2x+1}$ som uppenbarligen går mot $+1$ då $x \to -\infty$. Det givna uttrycket går därmed mot antingen $\pm\sqrt{1} = \pm 1$. Men täljaren är bara positiv och nämnaren är negativ då $x \to -\infty$ så gränsvärdet måste vara negativ, alltså -1.

För det 3:e g.v. kan vi skriva om så här :

$$\frac{2x+3\ln x}{x+\ln x} = \frac{2x\left(1+\frac{3\ln x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)} = 2 \cdot \frac{1+\frac{3\ln x}{x}}{1+\frac{\ln x}{x}}.$$

Eftersom $\frac{\ln x}{x} \to 0$ då $x \to \infty$ så är gränsvärdet lika med 2.

(f) Vi använder formeln

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

där $y = f(x)$. Här är $y = 3$ så vi söker x sådan att $3 = x^3 + 2x$. Man ser direkt att $x = 1$. Eftersom $f'(x) = 3x^2 + 2$ för godtyckligt x så har vi att

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 2} = \frac{1}{5}.$$

2. (i) Låt $\vec{v} = \vec{AB}$ och $\vec{w} = \vec{AC}$. Då är $\vec{v} = (1-2)\vec{i} + (4-3)\vec{j} + (5-1)\vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, och $\vec{w} = (3-2)\vec{i} + (0-3)\vec{j} + ((-1)-1)\vec{k} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$. Triangelns area ges av $\frac{1}{2} \cdot |\vec{v} \times \vec{w}|$. Vi beräknar först

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= [1 \cdot (-2) - (-3) \cdot 4)]\vec{i} - [(-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 4]\vec{j} + [(-1) \cdot (-3) - 1 \cdot 1]\vec{k} = 10\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Därmed är

$$\frac{1}{2} \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{108}}{2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

(ii) Eftersom D är mittpunkten på sidan BC så ges dess koordinator av medelvärdena av koordinatorna till B och C, dvs

$$D = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (2, 2, 2).$$

Då är $\vec{AD} = (2-2)\vec{i} + (2-3)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = -\vec{j} + \vec{k}$. Skalärprojektionen av $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ på denna ges av

$$\frac{\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) \cdot \left(-\vec{j} + \vec{k}\right)}{|-\vec{j} + \vec{k}|} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Notera att $x^2+4x+4 = (x+2)^2$ som är alltid positiv. Därmed är $f(x) > 0$ för alla $x > 1$ och $f(x) < 0$ för alla $x < 1$. Näst gäller att

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 8}{(x+2)^4} = -\frac{x^2 - 2x - 8}{(x+2)^4} = -\frac{(x-4)(x+2)}{(x+2)^4} = -\frac{x-4}{(x+2)^3},$$

som är 0 precis då $x - 4 = 0$, dvs då $x = 4$. Eftersom man via inspektion ser att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$, och vi har konstaterat innan att $f(x) < 0$ då $x < 1$ så måste det vara så att f antar sitt största värde i intervallet $[0, \infty)$ vid den kritiska punkten $x = 4$ och antar sitt minsta värde vid ändpunkten $x = 0$.

M.a.o. de största och minsta värdena ges respektivt av $f(4) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$ och $f(0) = \frac{-1}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

4. Notera att $x^2 + 3x + 3 > 0$ för alla reella x ty den kvadratiska ekvationen $x^2 + 3x + 3 = 0$ har två komplexa rötter. Så definitionsmängden till f är hela den reella linjen. När $|x|$ är stort så dominerar den linjära termen x gentemot den logaritmiska termen. Detta innebär att $f(x)/x \to -1$ då $x \to \pm\infty$. Men $f(x) - (-x) = \ln(x^2 + 3x + 3)$ går ej mot noll, snarare mot $+\infty$, dock långsamt. M.a.o. linjen $y = -x$ är inte en sned asymptot till f, vars graf ligger ovanför denna linje då $|x|$ blir stort och drar ifrån den, men så långsamt så att tangentlinjerna faktiskt närmar sig linjen $y = -x$. För att få en bra bild på grafen så återstår att hitta de kritiska punkterna. Man beräknar lätt att

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1,$$

som blir noll då $2x + 3 = x^2 + 3x + 3$, dvs $x^2 + x = 0$, dvs $x = 0$ eller $x = -1$. Från det asymptotiska beteendet kan vi redan inse att $x = -1$ måste vara ett lokalt minimum och $x = 0$ ett lokalt maximum.

5. Låt x resp. y beteckna längden av rektangelns vågrätta resp. lodrätta sidor. Låt $2t$ beteckna rektangelns omrkets. Så t är fixt och

$$x + y = t. \tag{1}$$

Låt $I(x, y)$ beteckna ljusinsläppet som en fuktion av x och y. Upp till en proportionelltskonstant så är

$$I(x,y) = 1 \times \text{skivans area} + 2 \times \text{rektangelns area} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2xy.$$

Om vi substituerar (1) så kan vi uttrycka insläppet som en funktion av bara x, nämligen

$$I(x) = \frac{\pi}{8}x^2 + 2x(t-x) = \left(\frac{\pi}{8} - 2\right)x^2 + 2tx.$$

Vi söker ett maximum för $I(x)$ så beräknar $I'(x) = \left(\frac{\pi}{4} - 4\right)x + 2t$ och sätter lika med noll. Då erhålls $x = \left(\frac{8}{16-\pi}\right)t$ och instoppning i (1) ger $y = \left(\frac{8-\pi}{16-\pi}\right)t$.

M.a.o. för att maximera ljusinsläppet ska rektangelns höjd och bredd stå i förhållendet $[8 - \pi : 8] = [1 - \frac{\pi}{8} : 1]$.

6.(a) Falskt. Den s.k. *triangelolikheten* säger snarare att $|z + w| \leq |z| + |w|$, med likhet om och endast om z är en positiv reell multipel av w.

(b) Sant. Detta kan härledas från Theorem 4, p.180 eller så kan man se direkt att VL och HL är lika i $x = 0$ och derivatan till $e^x - (1 + x)$ är $e^x - 1$ som är strängt positiv då $x > 0$, som innebär att VL $>$ HL då $x > 0$.

(c) Falskt, t.ex. $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$ och $g(x) = 1$ för alla x. Då är uppenbarligen $f(x) > g(x)$ för alla x, men f är avtagande, med ett absolut maximum i $x = 0$, medan att g är konstant : dvs $f'(x) \leq 0$ för alla x medan att $g'(x) = 0$ för alla x.

(d) Sant. Att polynomet har udda grad innebär att dess värden går mot $\pm\infty$ då $x \to \pm\infty$ respektivt. Att värdet noll antas någonstans följer nu från Intermediate Value Theorem.

(e) Sant. Vektorn $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ är nollvektorn om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är parallella och rätvinklig mot båda två annars. I det senare fallet så är $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ rätvinklig mot planet som spänns upp av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, som måste sammanfalla med det givna planet. Eftersom $\mathbf{c}$ ligger också i detta plan, så är $\mathbf{c}$ rätvinklig mot $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, och därmed blir skalärprodukten av dessa två vektorer lika med noll.

(f) Falskt, t.ex. om $f(x) = x$.

7.(a) Det innebär tre saker, att :
(i) f är definierad i en öppen intervall kring $x = a$,
(ii) $lim_{x \to a} f(x)$ existerar,
(iii) g.v. ovan är lika med $f(a)$.

(b) Theorem 9, p.82.

(c) Sätt $g(x) := f(x) - x$. Så g är också definierat i hela intervallen $[0, 1]$ och kontinuerlig där. Vi noterar att, ty f antar värden i samma intervall så är å ena sidan

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0,$$

och å andra sidan

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0.$$

Eftersom $g(0) \geq 0$ och $g(1) \leq 0$ och g är kontinuerlig, så innebär IVT direkt att det finns minst ett $c \in [0, 1]$ sådan att $g(c) = 0$, v.s.v.