MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för Z, TMV120
Tid: 2006-10-27, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Peter Lindroth, Henrik Seppänen tel 0762- 721 860, 0762- 721 861

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.
Betygsgränser, ev bonuspoäng inräknad: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
Lösningar publiceras på kursens hemsida första arbetsdagen efter tentamenstillfället.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Bestäm de gemensamma punkterna till planen (2p)
   $2x + y = 3$, $y + 2z = 1$ och $x + y + z = 2$.

   b) Bestäm alla reella x som uppfyller olikheten $\dfrac{x+2}{3-x} \geq 0$. (2p)

   c) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $x^3 + y^3 = 2$ i punkten $(1, 1)$. (2p)

   d) Lös ekvationen $z^3 = i$. Svaren ska ges på formen $a + bi$. (2p)

   e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

   i. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$ ii. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$ iii. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x+e^x)^2}{3e^{2x}}$

   f) Ge exempel på en funktion f sådan att $f'(0)$ existerar, men inte $f''(0)$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2.

3. Beräkna största värdet av funktionen $f(x) = \sqrt{1+x} - \dfrac{x}{2}$ $(x \geq -1)$. (6p)

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$. (6p)
   Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

5. Ett 2 m högt staket löper parallellt med ett höghus, på 1 m avstånd från huset. Hur lång är den kortaste stege som når husväggen från marken och över staketet? (6p)

Var god vänd!

---

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är växande på ett intervall I så är också $f(x)+g(x)$ växande på I.

   b) Varje deriverbar funktion är kontinuerlig.

   c) Om $f(x) \to \infty$ då $x \to 0$ och $g(x) \to \infty$ då $x \to 0$, så måste $f(x) - g(x) \to 0$ då $x \to 0$.

   d) Triangeln med hörn i punkterna (-3,0,-1), (-1,-1,1) och (1,6,-2) är rätvinklig.

   e) Om f är en funktion som är deriverbar på $[a,b]$ och $f(a) < f(b)$ så finns ett tal $c \in (a,b)$ sådant att $f'(c) > 0$.

   f) $\dfrac{d}{dx}|x^2+x| = |2x+1|$.

7. a) Definiera derivatan av en funktion f i en punkt a. (6p)

   b) Låt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{då} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{då} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Beräkna $f'(x)$ då $x \neq 0$.
   Samma funktion f åsyftas i uppgift c och d:

   c) Visa med hjälp av derivatans definition att $f'(0) = 0$.

   d) Visa att f' ej är kontinuerlig i $x = 0$.

Go n'eirí an bóthar libh !
/Peter

Lösningar

1.(a) Man ska lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & +y & & = & 3 \\ & y & +2z & = & 1 \end{cases}$$

Det visar sig då att en av ekvationerna är överflödig och man får en enparametrig lösning (dvs de tre planen skär varandra i en linje):

$$\begin{cases} x & = & 1+t \\ y & = & 1-2t \\ z & = & t \end{cases}$$