
(b) Då $x < 3$ är nämnaren positiv så tecknet hos kvoten är detsamma som tecknet hos täljaren som i sin tur är ickenegativ då $x \geq -2$. M.a.o. är kvoten ickenegativ då $-2 \leq x < 3$. Då $x > 3$ är nämnaren negativ varför kvoten är ickenegativ då täljaren är ickepositiv, dvs då $x \leq -2$. Men det finns inga tal som är både större än 3 och mindre än eller lika med -2. Sammantaget konstaterar vi att det angivna uttrycket är ickenegativt då $-2 \leq x < 3$.

(c) Via implicit derivering följer att

$$3x^2 + 3y^2y' = 0$$

ur vilket det snabbt följer att

$$y' = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Således är $y'(1) = -1$ och eftersom tangentlinjen passerar genom (1,1) måste den ha ekvationen

$$y = 2 - x.$$

(d) Vi har

$$z^3 = i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}$$

vilket ger

$$z = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3})},$$

dvs

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}},\ z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}},\ z_3 = e^{i\frac{9\pi}{6}}$$

dvs

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2},\ z_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2},\ z_3 = -i.$$

(e) Eftersom $\sqrt{4x^2+1} = |2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}$ gäller att det första gränsvärdet är 2 och det andra är -2. För det tredje, observera att $(x+e^x)^2 = e^{2x} + 2xe^x + x^2$, kom ihåg att exponentiellt växande dominerar över polynomiellt och dra härav slutsatsen att det tredje gränsvärdet är $\frac{1}{3}$.

(f) T.ex.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

2. Låt $A = (2,-1,0)$, $B = (-1,-1,-1)$ och $C = (2,1,1)$. Låt $\vec{v} = \vec{AB}$ och $\vec{w} = \vec{AC}$. Vi söker alla vektorer av längd 5 som är rätvinkliga mot både $\vec{v}$ och $\vec{w}$. Notera först att $\vec{v} = (-1-2)\vec{i} + (-1-(1))\vec{j} + (-1-0)\vec{k} = -3\vec{i} - \vec{k}$,

och $\vec{w} = (2-2)\vec{i} + (1-(-1))\vec{j} + (1-0)\vec{k} = 2\vec{j} + \vec{k}$. Vektorn $\vec{v} \times \vec{w}$ är rätvinklig mot både $\vec{v}$ och $\vec{w}$. Vi har att

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= [0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2)]\vec{i} - [(-3) \cdot 1 - (-1) \cdot 0]\vec{j} + [(-3) \cdot 2 - 0 \cdot 0]\vec{k} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Denna vektor har längd $\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$. Vi söker alla vektorer av längd 5 som är parallella med denna vektor. Det finns alltså två st. som ges av

$$\pm\frac{5}{7}\left(2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}\right).$$

Skalärprojektionen av dessa på $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ges då av

$$\pm\frac{5}{7}\frac{(2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})}{|\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}|} = \pm\frac{5}{7}\left(\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}\right) = \mp\frac{5}{7\sqrt{3}}.$$

3. Det gäller att
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}$$
som är 0 precis då $\sqrt{1+x} = 1$, dvs då $x = 0$. Eftersom man via inspektion ser att $f'(x)$ är positiv då $x < 0$ och negativ då $x > 0$ följer att f antar sitt minsta värde för $x = 0$. Eftersom $f(0) = 1$ är alltså f's minsta värde just 1.

4. Observera att
$$f(x) = \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$
ur vilket man snabbt ser att
$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to -1+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 1-} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to 1+} f(x) = -\infty.$$
Därför har f lodräta asymptoter $x = -1$ och $x = 1$. Dessutom gäller att
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$
och
$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 0$$
ur vilket man ser att f har den sneda asymptoten $y = x$, både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$.

MATEMATIK
Chalmers

---

5. Den kortaste stegen som når från marken till husväggen över staketet ligger, då den står uppställd, naturligtvis an mot staketet. Betrakta nu en stege som står uppställd på detta sätt, dvs står uppställd med ena änden på marken och andra änden mot husväggen och ligger an mot staketet. Låt θ beteckan den vinkel som bildas mellan husväggen och stegen, vilket förstås är samma vinkel som den som bildas mellan staketet och stegen. Låt $L(\theta)$ beteckna längden av stegen. Vi vill finna $L(\theta)$'s minsta värde. Per definition av de elementära trigonometriska funktionerna och det faktum att staketet är 2m högt och beläget 1m från huset gäller att

$$L(\theta) = \frac{2}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}.$$

Av situationen är det uppenbart att minimum ska sökas där L har en kritisk punkt. Det gäller att

$$L'(\theta) = \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{2\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta} = 0$$

precis då

$$2\sin^3\theta = \cos^3\theta$$

dvs då

$$\tan\theta = \frac{1}{2^{1/3}}.$$

Det är en standardövning att via en enkel figur av en rätvinklig triangel inse att om $\tan t = 1/a$ och $t \in (0, \pi/2)$ så gäller att

$$\cos t = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \sin t = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Tillämpa detta med $t = \theta$ och $a = 2^{1/3}$m sätt in i uttrycket för L och få att längden för den kortaste stegen är

$$\frac{2\sqrt{1+2^{2/3}}}{2^{1/3}} + \sqrt{1+2^{2/3}} = (1+2^{2/3})\sqrt{1+2^{2/3}} = (1+2^{2/3})^{3/2}.$$

Svaret är alltså att den kortaste stegen som når från marken till väggen över staketet är $(1+2^{2/3})^{3/2}$ meter (vilket i siffror blir cirka 4.16 meter).

6.(a) Sant, ty om $x < y$ så är ju $f(x) < f(y)$ och $g(x) < g(y)$ ur vilket det följer att $f(x) + g(x) < f(y) + g(y)$.

(b) Sant, ty om $f'(a)$ existerar gäller att

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h$$
$$= (\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h})\cdot(\lim_{h\to 0} h) = f'(a)\cdot 0 = 0.$$

(c) Falskt, t.ex. om $f(x) = \frac{1}{x}$ och $g(x) = \frac{1}{2x}$.

(d) Sant; vinkeln vid punkten (-3,0,1) är rät, ty de två vektorer som representeras av de två vektorerna med denna punkt som fot och triangelns övriga två hörn som ändpunkter är $(2, -1, 2)$ och $(4, 6, -1)$ och skalärprodukten av dessa två vektorer är $8 - 6 - 2 = 0$.

(e) Sant, ty enligt medelvärdessatsen finns ett tal $c \in (a, b)$ sådant att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

(f) Falskt, ty för $x < -1$ är $x^2 + x$ positivt varför $|x^2 + x| = x^2 + x$ som har derivata $2x + 1$. Men då $x < -1$ är ju $2x - 1$ negativt, så $|2x + 1| \neq 2x + 1$.

7.(a) Derivatan av en funktion f i punkten a ges av

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

då detta gränsvärde existerar (och är ändligt).

(b) Då $x \neq 0$ gäller att

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}.$$

(c) Enligt (a) gäller det att visa att

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Men $|f(h)/h| = |h \sin \frac{1}{h}| \leq |h| \to 0$ då $h \to 0$ så detta följer av inklämningssatsen.

(d) Enligt (b) saknar $f'(x)$ gränsvärde i $x = 0$.