MVE091 Matematisk statistik Z

Tentamen onsdag den 5 januari 2022 kl 8.30 – 12.30

LÄRARE OCH JOUR VIA TELEFON: Patrik Albin 031 7723512.

HJÄLPMEDEL: Beta eller häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor* eller fyra handskrivna A4-sidor (xeroxkopior, datautskrifter etc. är ej tillåtna) – endast ett av dessa tre hjälpmedel är alltså tillåtet och eleven väljer själv vilket alternativ den vill använda (innan tentan börjar).

MOTIVERINGAR: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

BETYGSGRÄNSER: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5. **Lycka till!**

1. Man kastar $n \geq 2$ stycken n-sidiga likadana men oberoende av varandra tärningar där för varje tärning sannolikheten är $1/n$ för vart och ett av de möjliga utfallen $\{1, 2, \ldots, n\}$. Bestäm sannolikheten för att de n tärningarna visar precis $n-1$ olika utfall (/antal prickar). **(5 poäng)**

2. Moden m för en kontinuerlig stokastisk variabel X är det värde $x = m$ för vilket frekvensfunktionen $f_X(x)$ är maximal. Medianen M är det värde för vilket $\int_{-\infty}^{M} f_X(x)\,dx = 1/2$. Ge exempel på tre frekvensfunktioner där $M < m$ för den första, $M = m$ för den andra och $M > m$ för den tredje. **(5 poäng)**

3. Visa att $\cos(\Theta)$ och $\sin(\Theta)$ är okorrelerade stokastiska variabler som ej är oberoende för Θ en likformigt fördelad stokastisk variabel över $[0, 2\pi]$. **(5 poäng)**

4. Låt $x_1, \ldots, x_m$ vara oberoende observationer av en binomialfördelad stokastisk variabel X med parametrar $n \in \mathbb{N}$ och $p \in (0,1)$ där n är känd medan p är okänd. Bestäm maximum likelihood-skattningen av p. **(5 poäng)**

5. Utanför Nya Ullevi fotbollsarena önskar en teknolog göra ett konfidensintervall för kvoten mellan varianserna för vikten av IFK-supportrar och GAIS-supportrar. Förklara för teknologen hur hen skall göra och vilka antaganden som krävs för detta.

(5 poäng)

6. Låt $Y_1, \ldots, Y_n$ vara oberoende normalfördelade stokastiska variabler med väntevärden $\alpha + \beta\, x_1, \ldots, \alpha + \beta\, x_n$ och varians σ^2 där $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och $\sigma^2 > 0$ är parametrar med okända värden medan $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ är kända tal. Hur kan man hypotestesta hypotesen $H_0 : \beta = 1$ mot alternativet $H_1 : \beta \neq 1$? **(5 poäng)**

MVE091 Matematisk statistik Z

Lösningar till tentamen den 5 januari 2022

1. Det finns $\binom{n}{2}\, n!$ olika sekvenser med $n-1$ olika utfall eftersom de två platserna för paret som måste finnas kan väljas på $\binom{n}{2}$ sätt och därefter vilken valör paret skall ha på n sätt och de övriga platsvalörerna på $(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,2 = (n-1)!$ sätt. Varje sådan sekvens med olika utfall har sannolikhet n^{-n}. Den sökta sannolikheten är därför $\binom{n}{2}\, n!/n^n$.

2. $f_X(x) = 2\,x$ för $x \in [0,1]$, $f_{\mathrm{N}(0,1)}(x)$ och $f_{\exp(1)}(x)$.

3. Av symmetriskäl är $\mathbf{E}\{\cos(\Theta)\} = \mathbf{E}\{\sin(\Theta)\} = 0$ medan $\mathbf{E}\{\cos(\Theta)\sin(\Theta)\} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} \sin(2\theta)\, d\theta = 0$ så att $\mathbf{Cov}\{\cos(\Theta),\sin(\Theta)\} = 0$. $\cos(\Theta)$ och $\sin(\Theta)$ är ej oberoende ty $\mathbf{P}\{\cos(\Theta) < 1/\sqrt{2}\} = \mathbf{P}\{\sin(\Theta) < 1/\sqrt{2}\} = 1/2$ medan $\mathbf{P}\{\cos(\Theta) < 1/\sqrt{2}, \sin(\Theta) < 1/\sqrt{2}\} = 0$ enligt trigonometriska ettan.

4. Likelihood-funktionen är $L(p) = \prod_{i=1}^m f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^m \binom{n}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{n-x_i}$ så att $L'(p) = \big(\frac{x_1+\ldots+x_m}{p} - \frac{mn-x_1-\ldots-x_m}{1-p}\big)L(p)$ som är noll för $p = \frac{x_1+\ldots+x_m}{mn} = \bar{X}/n$ vilket är maximum likelihood-skattningen av p.

5. Man antager normalfördelning. Då är enligt övre halvan av sidan 341 i boken $\sigma_2^2 S_1^2 /(\sigma_1^2 S_2^2)$ F-fördelad så att $[F_{1-\alpha/2} S_2^2/S_1^2, F_{\alpha/2} S_2^2/S_1^2]$ är ett konfidenintervall för σ_2^2/σ_1^2.

6. Man beräknar teststorheten T på sidan 395 i boken med värdet $\beta_1^0 = 1$ insatt samt accepterar H_0 om $T \in [-t_{\alpha/2}, t_{\alpha/2}]$ och förkastar H_0 annars..