MVE091 Matematisk statistik Z

Tentamen fredag den 29 oktober 2021 kl 14.00 – 18.00

LÄRARE OCH JOUR VIA TELEFON: Patrik Albin 031 7723512.

HJÄLPMEDEL: Beta eller häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor* eller fyra handskrivna A4-sidor (xerox-kopior, datautskrifter etc. är ej tillåtna) – endast ett av dessa tre hjälpmedel är alltså tillåtet och eleven väljer själv vilket alternativ den vill använda (innan tentan börjar).

MOTIVERINGAR: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

BETYGSGRÄNSER: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5. **Lycka till!**

1. Man kastar $m \in \{2,\ldots,n\}$ stycken n-sidiga likadana men oberoende av varandra tärningar där för varje tärning sannolikheten är $1/n$ för vart och ett av de möjliga utfallen $\{1,2,\ldots,n\}$. Bestäm sannolikheten för att tärningarnas utfall är stege dvs. ordnade i storleksordning något av $\{1,\ldots,m\}$, $\{2,\ldots,m+1\}$, ... , $\{n-m+1,\ldots,n\}$. **(5 poäng)**

2. Låt X vara exponentialfördelad med väntevärde 1. Ange en funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sådan att $Y=f(X)$ är likformigt fördelad över intervallet $[0,1]$. **(5 poäng)**

3. Beräkna $P[X \le Y]$ då X är likformigt fördelad över intervallet $[0,n]$ för ett $n \in \{1,2,\ldots\}$ och Y är geometriskt fördelad med parameter $p \in (0,1)$ samt X och Y är oberoende. **(5 poäng)**

4. Låt $x_1,\ldots,x_n$ vara oberoende observationer av en stokastisk variabel X som är likformigt fördelad över intervallet $[a,b]$ för reella tal $-\infty < a < b < \infty$. Ange skattningar av a och b enligt momentmetoden. **(5 poäng)**

5. Utanför Nya Ullevi fotbollsstadion önskar en teknolog testa huruvida IFK-supportrars medelvikt är större än GAIS-supportrars. Förklara för teknologen hur testen skall göras samt vilka antaganden som behövs för att testen skall vara korrekt. **(5 poäng)**

6. Låt α,β,σ vara okända och $x,x_1,\ldots,x_n$ kända reella tal samt $Y_1,\ldots,Y_n$ oberoende stokastiska variabler sådana att Y_i är normalfördelad med väntevärde $\alpha+\beta x_i$ och varians σ^2. Ange ett intervall inom vilket en normalfördelad stokastisk variabel Y med väntevärde $\alpha+\beta x$ och varians σ^2 ligger inom med 95% säkerhet utgående från observationer $y_1,\ldots,y_n$ av $Y_1,\ldots,Y_n$. **(5 poäng)**

MVE091 Matematisk statistik Z

Lösningar till tentamen den 29 oktober 2021

1. Det finns $n-m+1$ olika stegar med m tärningar och var och en av dem har sannolikhet $m!/n^m$ eftersom den första tärningen kan väljas bland de m som ingår i stegen på m sätt, den andra på $m-1$ sätt och så vidare varefter varje vald tärningssekvens har sannolikhet n^{-m}. Den sökta sannolikheten blir därför $(n-m+1)\, m!/n^m$.

2. Om Y är likformigt fördelad över intervallet $[0,1]$ är $X = F_X^{-1}(Y) = -\ln(1-Y)$ exponentialfördelad med väntevärde 1, så att $Y = F_X(X) = 1-\mathrm{e}^{-X}$.

3. $1 - \sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1}p\,\frac{n-k}{n}$.

4. Sätt $m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ lika med $E[X] = \frac{a+b}{2}$ och $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ lika med $E[X^2] = \mathrm{Var}(X)+E[X]^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4}$ och skatta a och b med de värden för dem $\hat{a}$ och $\hat{b}$ som löser ekvationerna $m_1 = \frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}$ och $m_2 = \frac{(\hat{b}-\hat{a})^2}{12} + \frac{(\hat{a}+\hat{b})^2}{4}$, vilket ger $\hat{b} = m_1 - \sqrt{3m_2 - 3m_1^2}$ och $\hat{a} = m_1 + \sqrt{3m_2 - 3m_1^2}$.

5. Om man antager normalfördelning är det samma tal som övning 10.24 i boken som finns löst på kurshemsidan.

6. Detta är formeln längst ned på sidan 401 i boken.