MVE090 Matematisk statistik Z

Tentamen fredag den 8 oktober 2021 kl 8.30 – 12.30

LÄRARE OCH JOUR VIA TELEFON: Patrik Albin 031 7723512.

HJÄLPMEDEL: Beta eller häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor* eller fyra handskrivna A4-sidor (xeroxkopior, datautskrifter etc. är ej tillåtna) – endast ett av dessa tre hjälpmedel är alltså tillåtet och eleven väljer själv vilket alternativ den vill använda (innan tentan börjar).

MOTIVERINGAR: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

BETYGSGRÄNSER: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5. **Lycka till!**

1. Man kastar $n \geq 4$ stycken n-sidiga likadana men oberoende av varandra tärningar där för varje tärning sannolikheten är $1/n$ för vart och ett av de möjliga utfallen $\{1, 2, \ldots, n\}$. Bestäm sannolikheten för följande version av "full house" (kåk): k tärningar visar en och samma siffra medan $n-k$ tärningar visar en annan (en och samma) siffra för godtyckligt $k \in \{2, \ldots, n-2\}$. **(5 poäng)**

2. Låt X vara standard normalfördelad. Bestäm felintensiteten (="hazard rate") för den stokastiska variabeln $Y = X^2$. **(5 poäng)**

3. Beräkna $P[X > Y]$ då X är exponentialfördelad med väntevärde 1 och Y Poissonfördelad med väntevärde 1 samt X och Y är oberoende. **(5 poäng)**

4. Låt $x_1, \ldots, x_m$ vara oberoende observationer av en hypergeometriskt fördelad stokastisk variabel X med parametrar $N \in \{1, 2, \ldots\}$, $n \in \{1, \ldots, N\}$ och $r \in \{0, \ldots, N\}$. Förutsatt att N och n har kända värden medan r är okänd, ange en väntevärdesriktig skattning av r. Vad är skattningens varians? **(5 poäng)**

5. Utanför Nya Ullevi fotbollsstadion önskar en teknolog testa huruvida IFK-supportrars vikt har större varians än GAIS-supportrars. Förklara för teknologen hur testen skall genomföras. **(5 poäng)**

6. Låt $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ vara oberoende obeservationer av en bivariat normalfördelad stokastisk variabel (X, Y). Hur kan man testa huruvida korrelationskoefficienten $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}$ är lika med $1/2$ eller ej? **(5 poäng)**

MVE090 Matematisk statistik Z

Lösningar till tentamen den 8 oktober 2021

1. För ett givet $k \in \{2, \dots, n-2\}$ kan de två olika tärningsresultat som skall vara med i kåken väljas på $n\,(n-1)$ sätt och de platser bland n de k resultaten av första slaget skall placeras på $\binom{n}{k}$ sätt varefter sannolikheten för varje sådan resultatsekvens är n^{-n}. Den sökta sannolikheten är därför $\sum_{k=2}^{n-2} n\,(n-1)\binom{n}{k} n^{-n}$.

2. Med $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$ och $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy$ betecknande frekvensfunktionen respektive fördelningsfunktionen för standard normalfördelningen gäller att $f_Y(y) = \frac{d}{dy} P[Y \leq y] = \frac{d}{dy} P[-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}] = \frac{d}{dy} P[X \leq \sqrt{y}] - \frac{d}{dy} P[X \leq -\sqrt{y}] = \frac{1}{2\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}\varphi(-\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y})$ och $F_Y(y) = \int_0^y f_Y(x)\,dx = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$ så att $\rho_Y(y) = f_Y(y)/(1-F_Y(y)) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y})/(1-\Phi(\sqrt{y}))$.

3. $\sum_{k=0}^{\infty}\int_{x=k}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\frac{1^k}{k!}\mathrm{e}^{-1}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k}\,\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}\,dx = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}-1}$.

4. Eftersom $E[X] = nr/N$ är $\hat{r} = N\bar{x}/n$ väntevärdesriktig med varians $(N/n)^2\,\mathrm{Var}[\bar{X}] = (N/n)^2\,\mathrm{Var}[X]/m = \frac{r\,(N-r)\,(N-n)}{m\,n\,(N-1)}$.

5. Detta är samma tal som övning 10.8 i boken som finns löst på kurshemsidan.

6. Om $\rho = \rho_0 = 1/2$ är teststorheten Z mitt på sidan 424 i boken med värdet $\rho_0 = 1/2$ insatt approximativt $\mathrm{N}(0,1)$-fördelad så genom undersöka om $Z \in [-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}]$ eller ej bestämmer vi om $H_0\!: \rho = 1/2$ skall accepteras eller förkastas.