MVE090 Matematisk statistik Z

Hemtentamen fredag den 5 juni 2020 kl 14 − 18

Lärare och examinator: Patrik Albin, telefon 031 7723512, palbin@chalmers.se

Hjälpmedel: Alla hjälpmedel är tillåtna – se Canvas anslag för förtydligande om regler.

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5.

Motiveringar: svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges. **Lycka till!**

1. I en låda ligger 30 kulor varav 8 stycken blåa, 7 stycken röda, 6 stycken gula, 5 stycken vita och 4 stycken gröna. Om man utan att titta sticker ner handen i lådan och väljer ut 6 stycken av dessa 30 kulor slumpmässigt, vad är sannolikhetren att man i handen får 2 stycken blåa, 2 stycken röda och 2 stycken gula kulor? **(5 poäng)**

2. En stokastisk variabel X är Poissonfördelad med parameter $\lambda > 0$. Vilken frekvensfunktion får då den stokastiska variabeln $Y = X^2$? **(5 poäng)**

3. Låt X och Y vara oberoende kontinuerliga stokastiska variabler med X likformigt fördelad över intervallet $[0, 1]$ och Y exponentialfördelad med väntvärde (/parameter) 1. Beräkna sannolikheten $\mathbf{P}(X \leq Y)$. **(5 poäng)**

4. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara observationer av en kontinuerlig stokastisk variabel X med frekvensfunktion $f_X(x) = 3\,x^2/(2\,a^3)$ för $x \in [-a, a]$ och $f_X(x) = 0$ för övrigt där $a > 0$ är en parameter med okänt värde. Använd observationernas stickprovsvarians S^2 till att skatta värdet för a mha. momentmetoden. **(5 poäng)**

5. Utanför Gamla Ullevi fotbollsarena mäter man vikterna $X_1, \ldots, X_{10}$ (inklusive kläder) av 10 stycken slumpmässigt utvalda GAIS supportrar

$$77.2\text{ kg}, 89.1\text{ kg}, 106.5\text{ kg}, 62.2\text{ kg}, 59.9\text{ kg}, 88.8\text{ kg}, 81.1\text{ kg}, 68.8\text{ kg}, 81.1\text{ kg}, 98.3\text{ kg}$$

och vikterna $Y_1, \ldots, Y_{10}$ av 10 stycken slumpmässigt utvalda IFK Göteborg supportrar

$$73.2\text{ kg}, 82.1\text{ kg}, 65.5\text{ kg}, 73.3\text{ kg}, 91.1\text{ kg}, 80.1\text{ kg}, 73.3\text{ kg}, 76.5\text{ kg}, 79.3\text{ kg}, 76.3\text{ kg}.$$

Testa hypotesen att GAIS supportrar väger mer än IFK supportrar. (Observera man vet att data är positiva så de kan ej vara normalfördelade.) **(5 poäng)**

6. Antag nu istället data $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^{10}$ i uppgift 5 är oberoende observationer av en (tex. normalfördelad) tvådimensionell stokastisk variabel (X, Y). Kan man testa hypotesen att X och Y är oberoende? **(5 poäng)**

MVE090 Matematisk statistik Z

Lösningar till tentamen den 5 juni 2020

1. $\binom{8}{2}\binom{7}{2}\binom{6}{2}/\binom{30}{6}$.

2. $f_Y(k^2) = \mathbf{P}(X^2 = k^2) = \mathbf{P}(X = k) = (\lambda^k/(k!))\,\mathrm{e}^{-\lambda}$ för $k = 0, 1, 2, \ldots$.

3. $\mathbf{P}(X \leq Y) = \int_0^\infty \mathbf{P}(X \leq y)\,\mathrm{e}^{-y}\,dy = \int_0^\infty \min(y,1)\,\mathrm{e}^{-y}\,dy = \ldots = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

4. Eftersom $\mathbf{E}(X) = 0$ och $\mathbf{Var}(X) = 3\,a^2/5$ blir skattningen $\hat{a} = \sqrt{5\,S^2/3}$.

5. Med avsikt göra "Wilcoxon signed-rank test for paired observations" bildar vi skillnader mellan parade data $Z_i = X_i - Y_i$ för $i = 1, \ldots, 10$ med resultat

$$3.9\text{ kg}, 7.0\text{ kg}, 41.0\text{ kg}, -11.1\text{ kg}, -31.2\text{ kg}, 8.7\text{ kg}, 7.8\text{ kg}, -7.7\text{ kg}, 1.8\text{ kg}, 22.0\text{ kg}.$$

Det följer att $|W_-| = 4 + 7 + 9 = 20$ och $W_+ = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 10 = 35$. Vi testar om $|W_-|$ är ovanligt liten med ensidig test med α-fel 0.05 mha. tabell VIII i M&A enligt vilken gänsen för ovanligt liten är 11. Alltså godtar vi hypotesen att GAIS och IFK supportrar har samma (median) vikt.

6. Ja testa om korrelationskoefficienten ρ mellan X och Y är skild från noll och förkasta hypotesen X och Y är oberoende om hypotesen $\rho = 0$ förkastas. Testen göres genom skatta ρ enligt sidan 419 i M&A $\hat{\rho} = \ldots = -0.487$ och sedan enligt sidan 422 i M&A jämföra teststorheten $T = \hat{\rho}\sqrt{10-2}/\sqrt{1-\hat{\rho}^2} = \ldots = -1.578$ med T(8)-fördelning tabell VI i M&A enligt vilken vi måste ha $T \notin [-2.306, 2.306]$ för förkasta hypotesen $\rho = 0$ med α-fel 0.05. Alltså förkastas ej hypotesen X och Y är oberoende. (Men om det ej förutsättes bivariat normalfördelning betyder det ej man kan konkludera X och Y oberoende ty de kan annars vara fullständigt beroende och ändå ha korrelation noll.)