

## MVE090 Matematisk statistik Z

**Tentamen fredag den 11 oktober 2019 kl 8.30 – 12.30**

Lärare: Patrik Albin. Jour: Olof Zetterqvist, telefon 031 7725325.

Hjälpmedel: Beta eller häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor* eller fyra handskrivna A4-sidor (xerox-kopior, datautskrifter etc. är ej tillåtna) – endast ett av dessa tre hjälpmedel är alltså tillåtet och eleven väljer själv vilket alternativ den vill använda (innan tentan börjar).

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5.

Motiveringar: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget anges.

1. Bestäm sannolikheten att vid kast av fem stycken vanliga tärningar (Yatzy) resultatet blir antingen liten straight eller stor straight, dvs. tärningar visar antingen  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  eller  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$  (utan hänsyn till ordningen mellan dem). **(5 poäng)**

2. Beräkna sannolikheten  $P(X > Y > Z)$  för tre oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler  $X$ ,  $Y$  och  $Z$  med parameter 1. **(5 poäng)**

3. En tvådimensionell stokastisk variabel  $(X, Y)$  har täthetsfunktion

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1/x & \text{för } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Beräkna  $E[X | Y = y]$ . **(5 poäng)**

4. Låt  $X_1, \dots, X_n$  vara oberoende stokastiska variabler med gemensamt väntevärde  $E[X_i] = \mu$  och gemensam varians  $Var[X_i] = \sigma^2$ . Visa att  $s^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)$  är en väntevärdesriktig skattning av  $\sigma^2$ . **(5 poäng)**

5. Låt  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$  vara oberoende normalfördelade stokastiska variabler med  $E[X_i] = \mu_X$ ,  $E[Y_i] = \mu_Y$ ,  $Var[X_i] = \sigma_X^2$  och  $Var[Y_i] = \sigma_Y^2$  för alla  $i$ . Hur testar man hypotesen  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  mot alternativet  $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ ? **(5 poäng)**

6. Utanför en fotbollsarena önskar en teknolog undersöka om det finns någon skillnad mellan andelen män i de båda lagens supporterskaror. Förklara hur en korrekt statistisk test av huruvida andelarna män bland supportrarna är lika eller olika för de båda lagen kan utföras. **(5 poäng)**

**Lycka till!**

## MVE090 Matematisk statistik Z

### Lösningar till tentamen den 11 oktober 2019

1. Det finns fem platser att välja för 2:an, fyra platser för 3:an, tre platser för 4:an, två platser för 5:an och en plats för 1:an eller 6:an, där sannolikheten för varje sådant vald ordning är  $(1/6)^4 \cdot (1/3)$ , så den sökta sannolikheten är  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1/6)^4 \cdot (1/3) = 5/162$ .

2. De sex möjliga ordningarna  $X > Y > Z$ ,  $X > Z > Y$ ,  $Y > X > Z$ ,  $Y > Z > X$ ,  $Z > X > Y$  och  $Z > Y > X$  är alla lika sannolika med sannolikhet  $1/6$  vardera.

3.  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_y^1 1/x dx = -\ln(y)$  för  $0 \leq y \leq 1$  så att  $E[X | Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|y}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) / f_Y(y) dx = \int_y^1 (-\ln(y))^{-1} dx = (1-y)/(-\ln(y))$  för  $0 \leq y \leq 1$ . (Detta är en variant av exempel 5.4.2 i läroboken.)

4.  $E[(n-1)s^2] = \sum_{i=1}^n E[X_i^2] - 2 \sum_{i=1}^n E[X_i \bar{X}] + \sum_{i=1}^n E[\bar{X}^2] = n(\sigma^2 + \mu^2) - (2/n)n(\sigma^2 + \mu^2) - 2(n-1)\mu^2 + \sigma^2 + n\mu^2 = (n-1)\sigma^2$ .

5. Detta beskrivs i avsnitt 10.5 i boken av Milton & Arnold.

6. Se avsnitt 9.3 i boken av Milton och Arnold.