MVE090 Matematisk statistik Z

Tentamen fredagen den 31 augusti 2018 kl 8.30 – 12.30

Lärare: Patrik Albin. Jour: Felix Held 031 7726792.

Hjälpmedel: Beta eller häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor* eller fyra handskrivna A4-sidor (xerox-kopior, datautskrifter etc. är ej tillåtna) – endast ett av dessa tre hjälpmedel är alltså tillåtet och eleven väljer själv vilket alternativ den vill använda (innan tentan börjar).

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5.

Motiveringar: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

1. Beräkna sannolikheten att man får fyrtal vid kast med fem balanserade (rättvisa) tärningar (Yatzy). [Fyrtal betyder som säkert är bekant att fyra av tärningarna visar ett nummer (tex. 6) och den femte tärningen att annat nummer (tex. 2).] **(5 poäng)**

2. Hazard rate funktionen $\rho(t)$ för en positiv kontinuerlig stokastisk variabel med frekvensfunktion $f(t)$ och fördelningsfunktion $F(t)$ definieras som $\rho(t) = f(t)/(1-F(t))$. Vilken fördelning har en stokastisk variabel som har konstant hazard rate (som ej beror av t)? **(5 poäng)**

3. Låt (X, Y) vara en två-dimensionell stokastisk variabel med frekvensfunktion

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{2\,(1-\rho^2)}\right\} \quad \text{för } x, y \in \mathbb{R},$$

där $\rho \in (-1, 1)$ är en konstant. Man kan lätt se att det finns ett visst speciellt värde för ρ för vilket X och Y är oberoende stokastiska variabler. Vilket värde är det? Förklara varför detta värde gör X och Y oberoende. **(5 poäng)**

4. Visa med ett exempel hur maximum likelihood-metoden fungerar. **(5 poäng)**

5. Utanför en fotbollsarena önskar en teknolog undersöka om det finns någon signifikant skillnad i medellängd mellan de båda fotbollslagens supportrar. Förklara hur en sådant undersökning kan gå till under förutsättning att de observerade längderna för lagens supportrar $X_1, \ldots, X_m$ respektive $Y_1, \ldots, Y_n$ antages vara $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ respektive $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ fördelade. **(5 poäng)**

6. Utanför en fotbollsarena önskar en teknolog undersöka om korrelationskoefficienten mellan vikt och längd för fotbollssupportrar är signifikant skild från 0. Förklara hur en sådant undersökning kan gå till. **(5 poäng)**

Lycka till!

MVE090 Matematisk statistik Z

Lösningar till tentamen den 31 augusti 2018

1. $\binom{5}{1} \cdot 6 \cdot 5 \cdot (\frac{1}{6})^5$.

2. $f(t)/(1-F(t)) = -\frac{d}{dt}\ln(1-F(t)) = \rho \Leftrightarrow -\ln(1-F(t)) = \rho\, t+C \Leftrightarrow 1-F(t) = \mathrm{e}^{-\rho\, t-C}$ för någon konstant C. Eftersom $F(0) = 0$ måste $C = 0$ och eftersom $F(+\infty) = 0$ måste $\rho > 0$. Alltså är det exponentialfördelade stokastiska variabler som har konstant $\rho(t) = \rho > 0$. Alternativt sätter man in $\rho(t) = \rho$ i formeln $1 - F(t) = \exp\{-\int_0^t \rho(s)\}$ och får samma svar som innan $1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\rho\, t}$.

3. $\rho = 0$ gör X och Y oberoende ty då gäller att $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-y^2/2}$ så att $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ och $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-y^2/2}$ så att $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ vilket betyder att X och Y är oberoende.

4. Se tex. exempel 7.2.3 i boken.

5. Se avsnitt 10.4 i boken.

6. Se avsnitt 11.6 i boken.