MVE090 Matematisk statistik Z

Skriftlig tentamen fredag 6 oktober 2017 kl 14 − 18

Lärare: Patrik Albin. Jour:

Hjälpmedel: Beta eller häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor* eller fyra handskrivna A4-sidor (xerox-kopior, datautskrifter etc. är ej tillåtna) – endast ett av dessa tre hjälpmedel är alltså tillåtet och eleven väljer själv vilket alternativ den vill använda (innan tentan börjar).

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5.

Motiveringar: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

1. Bestäm sannolikheten att man då man kastar fem stycken välbalanserade tärningar får kåk (="full house"), dvs. tre tärningar visar samma resultat (tex. sex prickar) medan de två övriga visar samma av ett annat resultat (tex. fem prickar). **(5 poäng)**

2. Det föreligger en enda observation x av en kontinuerlig stokastisk variabel X med frekvensfunktion $f_X(x) = 1/(\sigma\,\pi\,(1+(x/\sigma)^2))$ för $x\in\mathbb{R}$ där $\sigma>0$ är en parameter med okänt värde. Bestäm Maximum Likelihood skattningen $\hat{\sigma}$ av σ baserad på observationen x. **(5 poäng)**

3. Det föreligger n observationer $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ av en tvådimensionell kontinuerlig stokastisk variabel (X, Y) med bivariat normalfördelning med frekvensfunktion

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\bigg\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\bigg[\Big(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\Big)^2+\Big(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\Big)^2-2\rho\Big(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\Big)\Big(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\Big)\bigg]\bigg\}$$

för $x, y\in\mathbb{R}$ där $\mu_x, \mu_y\in\mathbb{R}$ är väntevärdena för X och Y, $\sigma_x, \sigma_y > 0$ varianserna för X och Y samt $\rho\in(-1,1)$ är korrelationskoefficienten mellan X och Y. Hur testar man hypotesen $H_0:\rho=0$ mot alternativet $H_1:\rho\neq 0$? **(5 poäng)**

4. Det föreligger n observationer $X_1, \ldots, X_n$ av en normalfördelad stokastisk variabel X med okända väntevärde μ och varians σ^2. Hur gör man ett $100(1-\alpha)\,\%$ konfidensintervall för värdet av σ^2 för ett givet tal $\alpha\in(0,1)$? **(5 poäng)**

5. I kapitel 6 i boken av Milton & Arnold beskrives minst tre olika professionella metoder att grafiskt åskådliggöra ett datamaterial. Beskriv två av dessa metoder tillräckligt nogrannt för att receptet skall kunna användas av en person som ej känner till dem innan. **OBS:** Om fler än två metoder beskrives räknas de två sämsta beskrivningarna i tentaresultatet. **(5 poäng)**

6. Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler som är likformigt fördelade över intevallen $[0,1]$ respektive $[0,2]$ så att $f_{XY}(x,y) = 1/2$ för $(x,y) \in [0,1] \times [0,2]$ och $f_{XY}(x,y) = 0$ för övrigt. Bestäm frekvensfunktionen $f_{UV}(u,v)$ för den stokastiska variabeln $(U,V) = (2X+Y, X+3Y)$. **(5 poäng)**

Lycka till!

MVE090 Matematisk statistik Z

Lösningar till tentamen den 6 okotber 2017

1. $6 \cdot 5 \cdot \binom{5}{3} \cdot (\frac{1}{6})^5 = \frac{25}{648}$.

2. Att finna det $\sigma = \hat{\sigma}$ som maximerar $f_X(x)$ är samma sak som att finna det $\sigma = \hat{\sigma}$ som minimerar $g(x,\sigma) = 1/(\pi\, f_X(x)) = \sigma + x^2/\sigma$. Här är $\frac{d}{d\sigma}\, g(x,\sigma) = 1 - x^2/\sigma^2 = 0$ för $\sigma = \sigma_1 = x$ och $\sigma = \sigma_2 = -x$ medan $\frac{d^2}{d\sigma^2}\, g(x,\sigma)|_{\sigma=\sigma_1} = 2\,x^2/\sigma^3|_{\sigma=\sigma_1} = 2/x$ och $\frac{d^2}{d\sigma^2}\, g(x,\sigma)|_{\sigma=\sigma_2} = 2\,x^2/\sigma^3|_{\sigma=\sigma_2} = -2/x$ vilket gör vi ser att $\sigma = |x|$ gör andraderivatan positiv så att $\hat{\sigma} = |x|$.

3. Detta beskrives i avsnitt 11.6 i boken av Milton & Arnold.

4. Detta beskrives i avsnitt 8.1 i boken av Milton & Arnold.

5. Se kapitel 6 i boken av Milton & Arnold.

6. Det är klart att $f_{UV}(u,v) = 0$ för (u,v) utanför området $(3u-v, 2v-u) = (5x, 5y) \in [0,5]\times[0,10]$. För en mängd $A \subseteq \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (3u-v, 2v-u) \in [0,5]\times[0,10]\}$ gäller å andra sidan att

$$\begin{aligned}
P[(U,V) \in A] &= P[(2X+Y, X+3Y) \in A] \\
&= \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,(2x+y,x+3y)\in A\}} f_{XY}(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_{\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,:\,(u,v)\in A\}} f_{XY}((3u-v)/5, (2v-u)/5) \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} dudv \\
&= \iint_{(u,v)\in A} \frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,dudv,
\end{aligned}$$

vilket visar att $f_{UV}(u,v) = 1/10$ för (u,v) sådana att $(3u-v, 2v-u) \in [0,5]\times[0,10]$.