MVE090 Matematisk statistik Z

Skriftlig tentamen fredag 25 augusti 2017 kl 08.30 – 12.30

Lärare: Patrik Albin. Jour: Claes Andersson, telefon 031 7725325.

Hjälpmedel: Beta eller häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor* eller fyra handskrivna A4-sidor (xerox-kopior, datautskrifter etc. är ej tillåtna) – endast ett av dessa tre hjälpmedel är alltså tillåtet och eleven väljer själv vilket alternativ den vill använda (innan tentan börjar).

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5.

Motiveringar: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

1. Vad är sannolikheten att man då man kastar fem stycken välbalanserade tärningar får tretal (dvs. tre tärningar visar samma resultat och de två övriga varsitt annat resultat). **OBS:** Bättre resultat än tretal (tex. fyrtal, femtal eller kåk) räknas inte utan det är sannolikheten för "exakt tretal" (och inte bättre) som efterfrågas. **(5 poäng)**

2. Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med frekvensfunktion $f_X(x) = 1/(\pi\,(1+x^2))$ för $x \in \mathbb{R}$ och fördelningsfunktion $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = 1/2 + \arctan(x)/\pi$ för $x \in \mathbb{R}$. Finn en funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådan att den stokastiska variabeln $Y = g(X)$ är likformigt fördelad över intervallet $[0,1]$, dvs. $f_Y(y) = 1$ för $y \in [0,1]$ och $f_Y(y) = 0$ för $y \notin [0,1]$ samt $F_Y(y) = y$ för $y \in [0,1]$. **(5 poäng)**

3. Låt (X,Y) vara en tvådimensionell kontinuerlig stokastisk variabel med frekvensfunktion $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2}\,(x+y)\,\mathrm{e}^{-x-y}$ för $x, y \geq 0$ och $f_{XY}(x,y) = 0$ för övrigt. Beräkna $E[Y]$. **(5 poäng)**

4. Bevisa utgående från definitionerna av varians $\mathrm{Var}[X] = E[(X - E[X])^2]$ och kovarians $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - E[X])\,(Y - E[Y])]$ faktumet att $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$. **(5 poäng)**

5. Låt $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ vara oberoende normalfördelade stokastiska variabler med $E[X_i] = \mu_X$, $E[Y_i] = \mu_Y$, $Var[X_i] = \sigma_X^2$ och $Var[Y_i] = \sigma_Y^2$ för alla i. Hur testar man hypotesen $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ mot alternativet $H_1 : \mu_X < \mu_Y$? **(5 poäng)**

6. Låt $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ vara oberoende stokastiska variabler där $X_1, \ldots, X_m$ är likafördelade med median M_X och $Y_1, \ldots, Y_n$ är likafördelade med median M_Y. Hur testar man hypotesen $H_0 : M_X = M_Y$ mot alternativet $H_1 : M_X \neq M_Y$? **(5 poäng)**

Lycka till!

MVE090 Matematisk statistik Z

Lösningar till tentamen den 25 augusti 2017

1. $\binom{5}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{25}{162}$.

2. Förutsatt att $g(x)$ är växande gäller att $F_Y(y) = P[g(X) \leq y] = P[X \leq g^{-1}(y)] = F_X(g^{-1}(y)) = y$ om och endast om $g(x) = F_X(x)$.

3. $E[Y] = \int_0^\infty y\, f_Y(y)\, dy = \int_0^\infty y\, (\int_0^\infty f_{XY}(x,y)\, dx)\, dy = \int_0^\infty y\, \frac{1}{2}(1+y)\, \mathrm{e}^{-y}\, dy = 3/2$.

4. $\mathrm{Var}[X+Y] = E[(X+Y-E[X+Y])^2] = E[((X-E[X]) + (Y-E[Y]))^2] = E[(X - E[X])^2 + (Y-E[Y])^2 + 2\,(X-E[X])\,(Y-E[Y])] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.

5. Detta beskrives i avsnitt 10.5 i boken av Milton & Arnold.

6. Detta beskrives i avsnitt 10.6 i boken av Milton & Arnold.