MVE090 Matematisk statistik Z, 7.5 hp

Tentamen 28 augusti 2012 fm

Tillåtna hjälpmedel: Valfri räknedosa utan lagrad information om kursen, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

Examinator: Tommy Norberg, ankn 3528 eller 0730 79 42 09.

Telefonjour: Tommy Norberg.

Maximalt antal tentamenspoäng är 30, av dessa krävs normalt 12 för godkänt betyg och 18 resp 24 för 4:a och 5:a.

Svar och lösningar till följande 8 uppgifter skall motiveras om ej annat sägs. Tänk på att sannolikheter bör ges med minst tre korrekta värdesiffror.

Lösningar publiceras på kurshemsidan under dagen.

Uppgifter

1. Block till en liten elektrisk motor levereras i lådor om 25 enheter. I ankomstkontrollen väljs fem enheter slumpmässigt ur varje låda. Dessa kontrolleras och om samtliga är felfria accepteras lådan. Antag att en låda innehåller två defekta enheter. Hur stor är sannolikheten att

   (a) lådan accepteras? (1 p)

   (b) exakt en defekt enhet hittas? (1 p)

   (c) båda defekta enheterna hittas? (1 p)

   Lösning: (a) $\frac{\binom{2}{0}\binom{23}{5}}{\binom{25}{5}} \approx 0.633$, (b) $\frac{\binom{2}{1}\binom{23}{4}}{\binom{25}{5}} \approx 0.333$, (c) $\frac{\binom{2}{2}\binom{23}{3}}{\binom{25}{5}} \approx 0.033$

2. För händelserna A, B och C gäller

$$P(A \cap B \cap C^c) = 0.24, \quad P(A \cap B^c \cap C) = 0.16, \quad P(A^c \cap B \cap C) = 0.06,$$
$$P(A \cap B^c \cap C^c) = 0.16, \quad P(A^c \cap B \cap C^c) = 0.06, \quad P(A^c \cap B^c \cap C) = 0.04$$
$$\text{och} \quad P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 0.04.$$

   Är de tre händelserna oberoende? (4 p)

   Lösning: Lista först ut att $P(A \cap B \cap C) = 0.24$ (summan av alla sannolikheter är ju $= 1$). Sedan inses att $P(A \cap B) = 0.24 + 0.24 = 0.48$ och att $P(A \cap B^c) = 0.16 + 0.16 = 0.32$. Detta ger $P(A) = 0.48 + 0.32 = 0.8$. På liknande sätt inses att $P(B) = 0.6$ och $P(C) = 0.5$. Sedan gäller det att kontrollera om samtliga krav för oberoende är uppfyllda. Dessa är $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ samt $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. Svaret på frågan är Ja.

3. Om $P(A) = 0.4$ och $P(B|A) = 0.8$ medan $P(B|A^c) = 0.2$, vad är $P(A|B)$? (4 p)

   Lösning: $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)} = 0.727$

4. Olyckor utmed en viss vägsträcka inträffar med intensiteten 3.2 per år. Beräkna sannolikheten för minst 2 olyckor under ett halvår. (Ledning: Det är rimligt att anta att olyckor förekommer enligt en Poissonprocess.) (4 p)

   Lösning: $1 - e^{-1.6}(1 + 1.6) = 0.475$

5. En slumpmässig tid antas ha felbenägenheten $z(t) = 0.06284t$. Beräkna dess väntevärde. (4 p)

   Lösning: I formelsamlingen ses att $f(t) = z(t)R(t)$ och att $R(t) = e^{-Z(t)}$, där $Z(t) = \int_0^t z(t)\,dt$. Den slumpmässiga tiden har alltså tätheten $f(t) = 0.06284te^{-0.03142t^2}$. Letar man i formelsamlingen, så ser man att detta är en Weibullfördelning med parametrar $\alpha = 0.03142$ och $\beta = 2$. Väntevärdet är således $\mu = 0.03142^{-1/2}\Gamma(1 + 1/2) = 5$, ty $\Gamma(1 + 1/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx \frac{3.142^{1/2}}{2}$

6. I en partisympatiundersökning angav 13.7% av 1263 slumpmässigt utvalda väljare att de skulle rösta på partiet X om det vore val idag. I valet erhöll partiet 12.0% av rösterna. Kan man på basis av undersökningsresultatet hävda att partiet X har blivit populärare? (4 p)

   Lösning: Det gäller alltså att testa $H_0 : p \leq 0.12$ (eller $H_0 : p = 0.12$) mot alternativet $H_1 : p > 0.12$. Teststatistikan $z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ är approximativt N(0,1). Observerat är $z = 1.86$ och P-värdet (d.v.s sannolikheten för ett minst lika extremt värde) är $\approx 1 - 0.9686 = 0.0314$. Man kan alltså med minst 95% säkerhet hävda att partiet har blivit populärare. Alternativt kan man beräkna ett nedåt begränsat 95% konfidensintervall för p. Då fås $p \geq \hat{p} - 1.645 \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} = 0.121$. Även denna analys ger alltså att man med minst 95% konfidens kan hävda att partiet har mer än 12% av väljarkåren bakom sig.

7. I 7 oberoende mätningar av halten vatten i en viss typ av lera erhölls medelvärdet 0.3713 l/kg. Standardavvikelsen var 0.00335 l/kg. Beräkna ett 95% konfidensintervall för vattenhalten. Antag normalfördelade mätningar. (3 p)

   Lösning: $\mu = 0.3713 \pm 2.44691 \cdot 0.00335/\sqrt{7} = 0.3713 \pm 0.0031 \Rightarrow \mu \in (0.3682,\ 0.3744)$

8. Jämför med ovanstående uppgift. Vid ett annat tillfälle uppmättes i 10 oberoende mätningar medelvärdet 0.3745 l/kg. Standardavvikelsen var 0.00782 l/kg. Testa på nivån 5% nollhypotesen att standardavvikelserna är lika i de två mätserierna mot alternativet att de är olika. (4 p)

   Lösning: Vi utnyttjar att $\frac{s_1^2}{s_2^2} \sim \mathrm{F}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ under $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Här är $\nu_1 = n_1 - 1 = 6$ och $\nu_2 = n_2 - 1 = 9$. Kritiska gränser för varianskvoten är således 2.5%-kvantilen 0.181 och 97.5%-kvantilen 4.320. Observerat är $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 0.184$. Detta ligger innanför de kritiska gränserna. Vi kan alltså ej förkasta $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ på nivån 5%.