Chalmers tekniska högskola
Matematisk statistik

MVE090 Matematisk statistik Z

Tentamen onsdag 25 oktober 2006 fm

Detta är även omtentamen på TMS051 Matematisk statistik och simuleringsteknik Z, del B.

Tillåtna hjälpmedel är räknedosa utan lagrad information om kursen, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

Examinator är Tommy Norberg, ankn 3528 eller 0730 79 42 09.

Maximalt antal tentamenspoäng är 30, av dessa krävs 12 för godkänt betyg och 18 resp 24 för 4:a och 5:a. Lösningar till tentamensproblemen går att ladda ner från kurshemsidan. Rättningsprotokoll anslås i MV:F, plan 2.

Svar skall motiveras om ej annat sägs i uppgiften.

Uppgifter

1. Brandlarm med automatlarm till Räddningstjänsten är populärt att installera. Dock är många larm av undermålig kvalitet. De både larmar när det inte borde larmas (vilket inte är så farligt, men dock kostar utryckningspengar) och missar att larma när det brinner (vilket inte alls är bra). Låt B vara händelsen att det brinner en viss given vecka och låt D beteckna händelsen att larmet går. Antag att de brandlarm som är installerade i ett visst industriområde karakteriseras av felsannolikheterna $P(D|B') = 0.05$ och $P(D'|B) = 0.10$. Om det i genomsnitt brinner i en byggnad försedd med larm ca 1 gång per år, så att $P(B) \approx 0.02$, vad är då (a) $P(D)$ och (b) $P(B|D)$? (4 p)

2. I en motor finns fem packningar. Motorn fungerar tillfredställande så länge minst 3 av packningarna håller tätt. Känt är att sannolikheten att en packning håller tätt under motorns driftstid är ca 0.80 och man tror sig veta att händelserna huruvida packningarna håller tätt eller ej är oberoende. Beräkna sannolikheten att motorn fungerar tillfredsställande under hela driftstiden. Svaret ska ges med åtminstone 2 decimalers noggranhet. (4 p)

3. Låt T vara en kontinuerlig icke-negativ stokastisk variabel. Då kan T fungera som modell för en slumpmässig funktionstid. Antag att T:s tillförlitlighetsfunktion är

$$R(t) = e^{-Z(t)}, \qquad t \geq 0$$

för någon icke-negativ växande funktion $Z(t)$ sådan att $Z(0) = 0$. Visa att då är T:s felbenägenhet $z(t) = Z'(t)$. (4 p)

Vänd!

4. Utfallet X, Y av ett visst försök har den bivariata tätheten

$$f(x,y) = c$$

för $x \geq 0$, $y \geq 0$ sådana att $0 \leq x + y \leq 1$.

   (a) Beräkna $E[X]$. (2 p)

   (b) Beräkna $\mathrm{Cov}[X, Y]$. (2 p)

5. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på X och låt $E[X] = \mu$, $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$. (a) Visa att $\bar{X}$ skattar μ väntevärdesriktigt, och (b) beräkna $\mathrm{Var}[\bar{X}]$. (4 p)

6. Antag att du har oberoende Poi(λ)-observationer $x_1, \ldots, x_n$. Härled ett uttryck för hur ML-skattningen av λ ska beräknas. (3 p)

7. I $n = 10$ oberoende mätningar av tillverkningstiden för en produkt erhölls $\sum x = 71.4$ (enhet: timmar) och $\sum x^2 = 531.07$. Man vill skaffa sig en uppfattning om hur lång den förväntade tillverkningstiden i värsta fall är. Bestäm därför ett uppåt begränsat konfidensintervall för denna med konfidensgrad 0.99. Det finns skäl att antaga att observationerna är normalfördelade. (4 p)

8. Man ville undersöka om halten alluminium i två jordprov tagna på femton meters avstånd är positivt korrelerad. Man slumpade därför ut fyra par av positioner med 15 meters inbördes avstånd. I varje sådant par mättes aluminiumhalten i båda positionerna. Följande data erhölls:

$$(12.2,\ 12.8),\ (13.8,\ 12.3),\ (10.7,\ 11.0),\ (12.8,\ 12.3)$$

   Enhet: mg/kg torrsubstans. Antag att detta är oberoende observationer av en bivariat normalfördelning med korrelation ρ. Testa på nivån 10% nollhypotesen $H_0 : \rho \leq 0$ mot alternativet $H_1 : \rho > 0$. (3 p)

Lycka till!

Svar eller lösningar till MVE090 den 25/10-06

1. (a) Med "lagen om total sannolikhet" fås $P(D) = P(B)P(D|B) + P(B')P(D|B') = 0.02 \cdot 0.90 + 0.98 \cdot 0.05 = 0.067$

   (b) Med Bayes formel fås $P(B|D) = \frac{P(B)P(D|B)}{P(D)} = \frac{0.018}{0.067} = 0.269$

2. Antalet packningar, X, som fungerar hela driftstiden är $\mathrm{Bin}(n,p)$-fördelat med $n = 5$ och $p = 0.8$, så den sökta sannolikheten är

$$P(X \geq 3) = \binom{5}{3} 0.8^3 \cdot 0.2^2 + \binom{5}{4} 0.8^4 \cdot 0.2^1 + \binom{5}{5} 0.8^5$$
$$= 0.2048 + 0.4096 + 0.32768 \approx 0.942$$

3. Ur $F(t) = 1 - R(t)$ fås $f(t) = F'(t) = -R'(t) = Z'(t)e^{-Z(t)}$, vilket implicerar för felbenägenheten $z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{Z'(t)e^{-Z(t)}}{e^{-Z(t)}} = Z'(t)$, vsv

4. Rita figur över utfallsrummet $\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 1\}$ och dra slutsatsen att $c = 2$ ur faktumet att utfallsrummet har arean $\frac{1}{2}$. Annars

$$1 = \int_0^1 \int_0^{1-x} c\, dy\, dx = c \int_0^1 (1-x)\, dx = c\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

(ty då $x \in [0,1]$ är fixerat gäller $0 \leq y \leq 1 - x$). Vi får nu att $f_X(x) = \int_0^{1-x} 2\, dy = 2(1-x)$ för $0 \leq x \leq 1$ och, analogt, $f_Y(y) = \int_0^{1-y} 2\, dx = 2(1-y)$ för $0 \leq y \leq 1$. Att variablerna har samma marginalfördelning kan man faktiskt sluta sig till ur figuren över utfallsrummet. Vi får vidare att $\mu_Y = \mu_X = \int_0^1 x \cdot 2(1-x)\, dx = \frac{1}{3}$. Dessa väntevärden kan även räknas ut så här: $\mu_Y = \mu_X = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2x\, dxdy = \int_0^1 2x(1-x)\, dx = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Dessutom har vi att $E[XY] = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \cdot 2\, dydx = \int_0^1 x(1-x)^2\, dx = \frac{1}{12}$. Således gäller att $\mathrm{Cov}[X,Y] = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{36}$.(Att kovariansen och därmed även korrelationen är negativ är rimligt med tanke på att då $x \in [0,1]$ är fixerat gäller $0 \leq y \leq 1 - x$.)

5. Notera först att $E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E\left[X_i\right] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$ (E är ju linjär). Detta visar väntevärdesriktigheten i (a). För att se påståendet i (b), notera $\mathrm{Var}\left[\bar{X}\right] = \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\left[X_i\right] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$. I den 3:e likheten utnyttjas att variablerna är oberoende.

6. Poissontätheten är $f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ för $x = 0, 1, \ldots$. Så trolighetsfunktionen är $L(\lambda) = \prod_i e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_i x_i}\prod_i \frac{1}{x_i!}$. Dess loggade motsvarighet är $\mathcal{L}(\lambda) = -n\lambda + (\sum_i x_i)\ln\lambda - \sum_i \ln(x_i!)$. Derivera och sätt derivatan till noll. Då ses att $n = \frac{\sum_i x_i}{\lambda}$, vilket medför att $\lambda = \frac{\sum_i x_i}{n} = \bar{x}$. ML-skattningen av λ är således lika med medelvärdet $\bar{x}$, som vi ju redan vet är en bra skattning av väntevärdet μ. Detta var kanske inte så förvånande med tanke på att $\mu = \lambda$.

7. Vi räknar först ut att $\bar{x} = 7.14$ och $s^2 = 2.3638 = 1.537^2$. Vi behöver $t_{0.01}(9) = 2.821$ och får $\mu = 7.14 + 2.821 \cdot 1.537/\sqrt{10} = 7.14 + 1.37 = 8.51$.

8. Börja med att beräkna $\sum x = 49.5$, $\sum y = 48.4$, $\sum x^2 = 617.61$, $\sum y^2 = 587.42$ och $\sum xy = 601.04$. Härur fås $S_{xx} = 617.61 - 49.5^2/4 = 5.0475$, $S_{yy} = 587.42 - 48.4^2/4 = 1.7800$ och $S_{xy} = 2.09 - 49.5 \cdot 48.4/4 = 2.0900$ och vi ser att $\hat{\rho} = \frac{2.0900}{\sqrt{5.0475 \cdot 1.78}} = 0.6973$. Obs värde av teststatistikan $\frac{\rho\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho^2}}$ är $\frac{0.6973\sqrt{4-2}}{\sqrt{1-0.6973^2}} = 1.3756$, vilket ska vara större än $t_{0.10}(2) = 1.886$ om H_0 kan förkastas på nivån 10%. Vi ser att H_0 ej kan förkastas.