**Lösningar till Matematisk statistik för Z & NP den 22 aug 2001**

1. $P(A\cap B)=1-(P(A^c\cap B^c)+P(A\setminus B)+P(B\setminus A))=1-(0.13+0.21+0.27)=0.39$, $P(A)=P(A\setminus B)+P(A\cap B)=0.21+0.39=0.60$ och $P(B)=P(B\setminus A)+P(A\cap B)=0.27+0.39=0.66$. $A$ och $B$ är ej oberoende, ty $0.39=P(A\cap B)\neq P(A)P(B)=0.396$

2. $P(A\cap B\cap C)=P(C|A\cap B)P(A\cap B)=P(C|A\cap B)P(B|A)P(A)=3/5\cdot 5/7\cdot 7/10=3/10$

3. Enl Bayes sats är

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)}=\frac{0.8\cdot 0.7}{0.8\cdot 0.7+0.2\cdot 0.3}\approx 0.90$$

$$P(A|B^c)=\frac{P(A)P(B^c|A)}{P(A)P(B^c|A)+P(A^c)P(B^c|A^c)}=\frac{0.8\cdot 0.3}{0.8\cdot 0.3+0.2\cdot 0.7}\approx 0.63$$

4. (a) Sannolikheten att en normalfördelad variabel antar ett värde inom avståndet $\pm 2\sigma$ från sitt väntevärde är $\approx 0.95$. (Det ska man känna till)

   (b) $2\sigma=6$, så $a=6$ (enl cgs är $S$ approx $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$-fördelad med $\mu=36\cdot 0.5=18$ och $\sigma=\sqrt{36\cdot 0.5\cdot 0.5}=3$)

5. Notera först att $X$ endast antar värdena 1 och 0 (alltså är diskret) och att $f(1)=p$ samt $f(0)=1-p$. Om utfallet är $x_1,\dots,x_n$ blir "likelihooden" $L(p)=p^{\sum_i x_i}(1-p)^{n-\sum_i x_i}$ ty $\sum_i x_i$ är antalet gånger 1 utfaller och $n-\sum_i x_i$ är antalet gånger 0 utfaller. Medelst logaritmering och derivering ses att $L(p)$ antar sitt största värde då $p=(\sum_i x_i)/n=\bar{x}$. ML-skattningen av $p$ är alltså $\widehat{p}=(\sum_i X_i)/n$. (Notera att $S=\sum_i X_i$ är frekvensen 1:or och att $p=P(X=1)$. ML-skattningen av $p$ är alltså antalet gånger händelsen $X=1$ inträffar dividerat med totala antalet försök.)

6. Se beviset av sats 7.1.1 på sida 227 i Milton & Arnold

7. Räkna först ut $\bar{x}=12.543$ och $s=1.6234$. Enl formelsamlingen är $(n-1)S^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1)$, där $S^2$ betecknar stickprovsvariansen, så att $P(\chi^2_{0.025}(6)\leq 6S^2/\sigma^2\leq\chi^2_{0.975}(6))=0.95$. Ur tabell över $\chi^2$-kvantiler fås $\chi^2_{0.025}(6)=1.23734$ och $\chi^2_{0.975}(6)=14.4494$ (obs att antalet frihetsgrader är $n-1=6$). Konfidensintervallet för $\sigma^2$ blir därför $[1.094,\ 12.78]$. Svaret på uppgiften är alltså $\sigma\in[1.046,\ 3.575]$ (0.95).

8. Skattningen av $p_F$ är $\widehat{p}_F=18/60=0.30$ och vi ska testa $H_0: p_F=0.15$ mot alternativet $H_1: p_F>0.15$ på nivån 5% eller på någon lägre nivå. Vi räknar därför ut $P$-värdet, som ju definieras som sanolikheten för en minst lika extrem observation som den vi erhöll givet att nollhypotesen är sann. Under $H_0$ är antalet kassa $f\sim\mathrm{Bin}(60,0.15)$. Vi får därför (via en normalapproximation) att $P$-värdet är $P(f\geq 18)=P((f-9)/2.77\geq(18-9)/2.77)\approx P(Z\geq 3.25)=0.0006\approx 0.001$ enl normalfördelningstabell. (Obs att $\mu=E[f]=60\cdot 0.15=9$ och $\mathrm{Var}[f]=60\cdot 0.15\cdot 0.85=7.65\Rightarrow\sigma=\sqrt{7.65}=2.77$.) Svaret på uppgiften är alltså ja, att $p_F$ är större än 0.15 är statistiskt säkerställt på alla nivåer större än ca 0.1%.