Lösningar till Matematisk statistik för Z & NP den 12 jan 2001

1. (a) Händelserna är disjunkta. De kan alltså inte inträffa samtidigt. (b) $P[A \cup B] = 4/7$

2. $P[W > t] = P[X_t = 0] = \exp(-\lambda t)$, ty den första händelsen W inträffar efter tidpunkten t om, och endast om, inga händelser inträffar i tidsintervallet $[0, t]$, dvs omm $X_t = 0$. Vi ser att $P[W \leq t] = 1 - \exp(-\lambda t)$ och känner igen detta som fördelningsfunktionen för en exponentialfördelning med väntevärde $\beta = 1/\lambda$.

3. Utnyttja att $Z = (X - \mu)/\sigma \sim \mathrm{N}(0, 1)$ om $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. (a) $P[X > 9] = P[(X - 5)/2 > 2] = P[Z > 2] = 0.023 \approx 0.025$. (b) $2 \cdot 0.023 = 0.046 \approx 0.05$. (c) S är approximativt $N(50, 5)$. Om S vore exakt $N(50, 5)$ skulle $a = 1.96 \cdot 5 = 9.8$. Här är det säkert bättre att svara $a \approx 10$ p g a a S är diskret och N-fördelningen kontinuerlig.

4. Eftersom integralen av tätheten är 1, blir c lika med arean av utfallsområdet $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 4\}$, som är en triangel med basen 4 och höjden 4. Så (a) $c = 8$. (b) För alla $(x, y) \in \Omega$ gäller att $x \leq y$. Så $P[X \leq Y] = 1$ och $P[Y \leq X] = 0$. (c) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\,dy = \int_x^4 1/8\,dy = (4 - x)/8$ för $0 \leq x \leq 4$. (d) X och Y är ej oberoende. Det jobbiga sättet att visa detta är att bestämma Y:s täthet $f_Y(y)$ och visa att $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$. Det smarta sättet är att konstatera att om man vet att $Y = y$, så följer att $X \leq y$. Kunskap om Y:s utfall, inskränker alltså de möjliga utfallen för X. Då kan inte X och Y vara oberoende.

5. Den naturliga modellen är $f \sim \mathrm{Bin}(60, p)$, där, för normala symmetriska tärningar, $p = 1/6$. Nollhypotesen är alltså $H_0 : p = 1/6$ och osymmetri påvisas om H_0 kan förkastas till förmån för alternativhypotesen $H_1 : p > 1/6$, ty att $p > 1/6$ var ju det man misstänkte innan försökserien gjordes. p-värdet för utfallet $f = 16$ är $P[f \geq 16]$, där sannolikheten ska beräknas under H_0. Avancerad beräkningshjälp ger att p-värdet är 0.034. Medelst normalapproximation med halvtalskorrigering ($f \sim \mathrm{Bin}(60, p) \approx \mathrm{N}(10, \sqrt{60 \cdot 1/6 \cdot 5/6} = \mathrm{N}(10, 2.887)$ fås p-värdet till $P[(f - 10)/2.887 \geq (16 - 10 - 0.5)/2.887] \approx 1 - \Phi(1.91) = 0.028$. Testet förkastar alltså H_0 på nivån 5% och svaret på uppgiften är därför ja.

6. Det står i båda deluppgifterna att "Konfidensgraden ska vara" och det enda sätt vi känner till att hålla en exakt konfidensgrad är om data är $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, så vi antar detta. (I verkliga livet måste man naturligtvis försäkra sig om att detta är fallet åtminstone approximativt. Annars måste man komma överens med sig själv om centrala gräsvärdessatsen går att tillämpa.) Vi räknar ut $\bar{x} = 4.796$ och $s^2 = 5.3116$ $\Rightarrow s = 2.3047$. (a) Vi punktskattar μ med $\bar{x} = 4.796$. Intervallskattningen fås ur faktumet att $(\bar{X} - \mu)/(s/\sqrt{n})$ är t-fördelad med $n - 1 = 9$ frihetsgrader. 0.005-kvantilen i $t(9)$-fördelningen är 3.25 och intervallskattningen med konfidensgrad 0.99 sträcker sig därför från $\bar{x} - 3.25s/\sqrt{n} = 2.42$ till $\bar{x} + 3.25s/\sqrt{n} = 7.17$. (b) Punktskattningen av variansen σ^2 är $s^2 = 5.3116$. Intervallskattningen fås ur faktumet att $(n-1)s^2/\sigma^2$ är $\chi^2(n-1)$-fördelad. 0.025- och 0.975-kvantilerna i denna fördelning är 2.700 resp 19.023. Händelsen $2.700 \leq (n-1)s^2/\sigma^2 \leq 19.023$ har alltså sannolikheten 0.95. Stuva om olikheterna så att σ^2 hamnar i mitten och stoppa in erhållet värde $s^2 = 5.3116$. Då bör du få intervallet [2.52, 17.71].

7. Se ex 7.2.2 på sida 231 i Milton & Arnold.

8. Se beviset av sats 7.1.3 på sida 229 i Milton & Arnold.