TMS051 Matematisk statistik och simuleringsteknik, Z, del A

Tentamen 18 januari fm V

Även omtentamen på TMS050 Matematisk statistik och simuleringsteknik Z, del A.

Tillåtna hjälpmedel är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

Examinator är Tommy Norberg, ankn 3528 eller 0730 79 42 09. Tommy går att nås per mobiltelefon under tentamen. Ingen jour således.

Maximalt antal tentamenspoäng är 30, av dessa krävs 12 för godkänt betyg på tentan och 18 resp 24 för 4:a och 5:a. Lösningar går att ladda ner från kurshemsidan. Rättningsprotokoll anslås i MV:F, plan 2.

Svar skall motiveras om ej annat sägs i uppgiften.

Uppgifter

1. Låt A, B vara oberoende händelser sådana att $P(A) = 0.3$ och $P(B) = 0.4$. Beräkna sannolikheten att

   (a) ingen av händelserna A och B inträffar (1 p)

   (b) exakt en av A och B inträffar (1 p)

   (c) minst en av A och B inträffar (1 p)

   (d) både A och B inträffar (1 p)

2. För rökdetektorn på min brors kontor gäller att den betingade sannolikheten för larm är 0.99 givet att det brinner och 0.02 givet att det ej brinner. Att den kan larma även om det ej brinner beror på personalens aktiviteter. T.ex händer det att man steker pannkakor i lunchrummet. Antag att sannolikheten för brand är 0.01. Hur stor är då den betingade sannolikheten att det brinner givet att detektorn larmar. (3 p)

3. Emil gillar tärningsspel. Bl.a så kastar han tärningen ända tills han får en sexa. Han påstår att i medel behöver han kasta tärningen 5.5 gånger.

   (a) Har han rätt eller fel? Utveckla. (2 p)

   Han påstår även att sannolikheten för totalt 7 prickar i två kast är 1/6.

   (b) Har han rätt eller fel? Utveckla. (2 p)

4. En produkt består av två delkomponenter, som båda är en förutsättning för att produkten ska fungera enl dess specifikation. Produkten fungerar alltså felfritt bara om båda komponenterna fungerar. För den ena av dessa komponenter gäller att funktionstiden är exponentialfördelad med parameter $\lambda = 0.010$, medan den andras funktionstid är Weibullfördelad med parametrar $\alpha = 0.056$ och $\beta = 0.5$. Tidsenhet är år. Anta att funktionstiderna är oberoende av varandra. Bestäm sannolikheten att produkten fungerar enl specifikation hela garantitiden, som är 1 år. (4 p)

5. (a) För data given på formen $n = 100$, $\sum_i x_i = 23$, $\sum_i x_i^2 = 23$, beräkna medelvärde och standardavvikelse. (2 p)

   (b) Illustrera datamängden 1, 2, 1, 6, 2, 1, 0, 7, 4, 9, 4, 4 med en Box-plot. (2 p)

6. 100 slumpmässigt utvalda gymnasieelever utfrågades om sina studievanor. På en viss fråga svarade 23 elever ja. Kan man på basis av detta dra någon slutsats om hela populationen gymnasieelever och i så fall vad? Ge minst ett par olika exempel. (4 p)

7. I $n = 10$ oberoende mätningar av tillverkningstiden för en produkt erhölls $\sum x = 71.4$ (enhet: timmar) och $\sum x^2 = 531.07$. Bestäm ett 95% konfidensintervall för förväntad tillverkningstid. Det finns skäl att antaga att observationerna är normalfördelade. (4 p)

8. Man ville undersöka hur halten krom varierar i jordprov tagna i godtyckliga positioner i en tomt som numera är oanvänd, men som tidigare har används till framställning av förkromade metallplåtar. Man slumpade ut fyra positioner. I varje position togs ett jordprov, som skickades till ett laboratorium för bestämning av kromhalten. Följande data erhölls:

   $$12.2,\ 13.8,\ 10.7,\ 12.8,$$

   Enhet: mg/kg torrsubstans. Antag att detta är oberoende $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$-observationer. Önskvärt är att kromhalten inte varierar för mycket. Beräkna därför en uppåt begränsad intervallskattning av σ med konfidens 95%. (3 p)

Lycka till!

Lösningar till TMS051, del A den 18/1-07

1. (a) $P(A' \cap B') = P(A')P(B') = \ldots = 0.42$

   (b) $P(A' \cap B \cup A \cap B') = P(A' \cap B) + P(A \cap B') = P(A')P(B) + P(A)P(B') = 0.46$

   (c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.58$

   (d) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.12$

2. Låt B beteckna händelsen att det brinner och L att detektorn larmar. Med Bayes formel fås

$$P(B|L) = \frac{P(B)P(L|B)}{P(B)P(L|B) + P(B')P(L|B')} = \frac{0.01 \cdot 0.99}{0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.02} \approx 0.333$$

3. Sannolikheten att båda felfungerar är $10^{-3} \cdot 10^{-3} = 10^{-6}$, så svaret på fråga (a) är $1 - 10^{-6} = 0.999999$. Den i (b) sökta sannolikheten är $(1-10^{-6})(1-10^{-5}) = 1 - 10^{-5} - 10^{-6} + 10^{11} \approx 1 - 10^{-5} - 10^{-6} = 0.999989$.

4. För den förstnämnda komponenten gäller att sannolikheten att den fungerar under det första driftsåret är $p_1 = e^{-\lambda} = e^{-0.01} = 0.990$ och för den andra komponenten är samma sannolikhet $p_2 = e^{-\alpha} = e^{-0.056} = 0.946$. (För en exp($\lambda$)-variabel T gäller ju att $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ och för en Wei(α, β)-variabel S gäller $P(S > t) = e^{-\alpha t^{\beta}}$. Detta följer av fakta ur formelsamlingen.) Produkten fungerar under det första driftsåret om, och endast om, båda komponenterna fungerar, så samma sannolikhet för hela produkten måste bli $p = p_1 p_2 = e^{-0.066} = 0.936$.

5. (a) $\bar{x} = 23/100 = 0.23$, $99s^2 = 23 - 23^2/100 = 17.71 \Rightarrow s \approx 0.423$

   (b) Sortera data: 0, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 7, 9. En fjärdedel ska läggas i varje ”box” så avgränsningarna blir 0 (minsta värdet), 1 (undre kvartilen, mitt mellen 3:e och 4:e värdet), 3 (medianen, mitt mellan 6:e och 7:e värdet), 5 (övre kvartilen, mitt mellan 9:e och 10:e värdet) och 9 (största värdet). Etc.

6. Först kan man ju konstatera att det går fint att skatta proportionen ja-svarare i hela populationen. Vi kallar den p och dess skattning är $\hat{p} = 0.23$. Sedan kan man konstatera att förutsättningarna för c.g.s är uppfyllda. Så vi kan bilda konfidensintervall för p. Väljes konfidensgraden till ca 95% blir ”den statistiska felmarginalen” $\pm 1.96 \cdot \sqrt{0.23 \cdot 0.77/100} \approx \pm 0.08$. Vill man istället ha en undre gräns för p som gäller med en viss konfidens, t.ex 95%, så blir denna $0.23 - 1.645 \cdot \sqrt{0.23 \cdot 0.77/100} \approx 0.16$. Analogt är 0.30 en övre gräns för p som gäller med konfidensen ca 95%.

7. Ur data fås att $\bar{x} = \frac{71.4}{10} = 7.14$ och att $s^2 = \frac{1}{9}\left(531.07 - \frac{71.4^2}{10}\right) = 2.3638 = 1.537^2$. Ur tabell fås kvantilen $t_{0.025,9} = 2.262$. Med konfidensen 0.95 gäller därför $\mu = 7.14 \pm 2.262 \cdot 1.537/\sqrt{10} = 7.14 \pm 1.10$ eller $\mu \in (6.04,\ 8.24)$.

8. Börja med att beräkna $\sum x = 49.5$ och $\sum x^2 = 617.61$. Härur fås $s^2 = \frac{1}{3}\left(617.61 - \frac{49.5^2}{4}\right) = 1.6825 = 1.297^2$. Ur tabell fås $\chi^2_{0.95,3} = 0.352$. Således inträffar $3s^2/\sigma^2 \geq 0.352$ med 95% sannolikhet, och medelst omflyttning av faktorerna i olikheten fås $\sigma^2 \leq 3s^2/0.352 = 14.34 = 3.79^2$. Den sökta intervallskattningen är alltså $\sigma \leq 3.79$.