Chalmers tekniska högskola
Matematisk statistik

TMS051 Matematisk statistik och simuleringsteknik, Z

Tentamen 11 december 2004 e V

Tillåtna hjälpmedel är räknedosa utan lagrad information om kursen, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

Examinator är Tommy Norberg, ankn 3528 eller 0730 794209.

Jour är Oskar Sandberg, ankn 5366. Oskar besöker skrivningssalen efter kl 15 och vid behov senare.

Maximalt antal tentamenspoäng är 30, av dessa krävs 12 för godkänt betyg och 18 resp 24 för 4:a och 5:a. Lösningar går att ladda ner från kurshemsidan. Rättningsprotokoll anslås i första våningen i Matematisk centrum, Eklandagatan 86. Granskning av tentan kan under terminstid göras i mottagningsrummet på entréplanet (våning 2) i Matematisk centrum må-fr 12^{30}–13.

Svar skall motiveras om ej annat sägs i uppgiften.

Fyll i enkäten när du är klar med uppgifterna nedan. Ju fler som svarar, desto bättre kan vi göra kursen!

Uppgifter

1. Hur stor är sannolikheten att få en s.k Black Jack? Vi har en välblandad kortlek om 52 kort, bestående av 4 st ess, 12 st klädda kort (4 st kungar, 4 st damer och 4 st knektar) samt ytterligare 36 kort (4 st 10:or, 4 st 9:or, ..., 4 st 2:or). En giv består av två kort dragna från toppen av kortleken och att få en Black Jack innebär att man får ett ess och antingen ett klätt kort eller en 10:a på given. Ordningen saknar betydelse. (3 p)

2. Överföring av data från rymdsonder som färdats till andra planeter i solsystemet sker genom att man sänder långa sekvenser av s.k bitar där en bit är antingen 0 eller 1. Sändaren i satelliten är av naturliga skäl svag, vilket ger ett lågt signal/brus-förhållande på mottagarsidan. Detta medför i sin tur att risken för felaktigt uppfattade data är stor. Antag att det vid mottagandet av en bit gäller att risken att den felaktigt tolkas som 1:a är ca 10.0% och att den felaktigt tolkas som 0:a är ca 7.5% (detta kan man ta reda på genom att satelliten beordras sända en given testsekvens). Om det är så att bilder i snitt innehåller 55% 1:or och 45% 0:or, hur stor är då den betingade sannolikheten att en 1:a sändes givet att en 1:a mottogs? (3 p)

3. Betrakta funktionen $f(x,y) = \frac{c}{xy}$ definierad för $x, y \geq 1$. Är detta en täthet för en stokastisk vektor (X, Y) för något $c > 0$ och, i så fall, för vilket c? (3 p)

4. Visa att
   (a) $E[\bar{X}] = \mu$ (1 p)
   (b) $\mathrm{Var}[\bar{X}] = \sigma^2/n$ (2 p)
   (c) $E[s^2] = \sigma^2$ (2 p)

Här är $\bar{X}$ och s^2 medelvärde respektive varians i ett stickprov om n oberoende observationer av en stokastisk variabel X med väntevärde μ och varians σ^2. En av de tre visade likheterna gäller även då observationerna ej är oberoende. Vilken?

5. I syfte att verifiera kvalitet i tillverkning av resistorer mätte man resistansen i fem st slumpvis utvalda produkter. I kvalitetskravet ingår att standardavvikelsen ej får vara större än 6.00. Medelvärdet av de fem resistanserna uppmättes till 34.52 ohm och variansen till $7.29 = 2.7^2$. Undersök med följande två metoder om man lyckades med att verifiera kvalitetskravet på standardavvikelsen:

   (a) Genom att göra ett uppåt begränsat konfidensintervall för standardavvikelsen med konfidensgrad ca 0.95. (2 p)

   (b) Genom att testa $H_0 : \sigma \geq 6.00$ mot $H_1 : \sigma < 6.00$ på nivån 0.05. (2 p)

   Ange i båda fallen om man lyckades verifiera kvalitetskravet eller ej. Det är tillåtet att anta att mätmetoden ger normalfördelade observationer.

6. I simuleringsuppgift 2 ska man i två deluppgifter simulera data $n = 100$ gånger och utföra ett test av $H_0 : \rho = 0$ mot $H_1 : \rho > 0$. Syftet var att skatta sannolikheten p att förkasta H_0 och indikera att denna är en växande funktion av det verkliga värdet av korrelationen ρ. I fall (b), då $\rho = 0.85$, erhöll jag $f_b = 73$ förkastanden och i fall (d), då $\rho = 0.4$, erhöll jag $f_d = 4$ förkastanden. Kalla motsvarande sannolikheter för p_b respektive p_d.

   (a) Punkt- och intervallskatta (med konfidensen ca 0.95) p_b och p_d. (2 p)

   (b) Testa $H_0 : p_b \leq p_d$ mot $H_1 : p_b > p_d$ på nivån 0.01. (2 p)

7. Textilföretaget A förlorar marknadsandelar p.g.a kvalitetsproblem och höga priser. Ledningen funderar allvarligt på att investera i ny teknik. Vid provtillverkning med den nya tekniken gjordes $n_N = 12$ oberoende provtygbitar. Efter inspektion fick varje prov ett kvalitetstal. Medelvärdet av dessa blev $\bar{x}_N = 8.5$ och standardavvikelsen blev $s_N = 3.18$. För jämförelse tillverkades $n_G = 24$ oberoende prover med den nuvarande processen. Därvid erhölls $\bar{x}_G = 5.4$ och $s_G = 5.21$. Ju högre kvalitetstal, desto bättre är kvaliteten. Man vill också att standardavvikelsen i processen ska vara liten. Jämför värdena så som vi gjort i kursen och besvara (i den mån det går och på ett statistiskt korrekt sätt) följande två frågor:

   (a) Är $\sigma_N < \sigma_G$? (2 p)

   (b) Är $\mu_N > \mu_G$? (2 p)

8. I syfte att undersöka huruvida två materialegenskaper, vi kan kalla dem x och y, är korrelerade eller ej gjordes (x, y)-mätningar på $n = 25$ slumpmässigt utvalda prover. Härvid erhölls $\sum x = 1.23$, $\sum y = 0.75$, $\sum x^2 = 3.33$, $\sum y^2 = 2.21$ och $\sum xy = 1.43$ och. Antag normalfördelade mätningar. Skatta korrelationen och undersök om man med risken att ha fel ≤ 0.01 kan påstå att denna $\neq 0$. (4 p)

1. Vi ska dra två kort ur kortleken. Ordningen spelar ingen roll. Multiplikationsprincipen ger att den sökta sannolikheten är $\frac{\binom{4}{1}\binom{16}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{4}{52} \cdot \frac{16}{51} \cdot 2 = \frac{32}{663} \approx 0.0483$. Alternativt kan man börja med att beräkna sannolikheten att man först får ett ess och sedan ett klätt kort, som är $\frac{4}{52} \cdot \frac{16}{51} = \frac{16}{663} \approx 0.0241$ och lägga till den lika stora sannolikheten att man först får ett klätt kort och sedan ett ess.

2. Låt M resp S beteckna det som togs emot och det som sändes. Vi vet att $P(S) = 0.55$, $P(M = 1 \,|\, S = 0) = 0.100$ och $P(M = 0 \,|\, S = 1) = 0.075$. Den sökta sannolikheten $P(S = 1 \,|\, M = 1)$ fås ur Bayes sats så här:
$$\begin{aligned} P(S=1 \,|\, M=1) &= \frac{P(S=1)P(M=1 \,|\, S=1)}{P(S=1)P(M=1 \,|\, S=1) + P(S=0)P(M=1 \,|\, S=0)} \\ &= \frac{0.55 \cdot 0.925}{0.55 \cdot 0.925 + 0.45 \cdot 0.100} \approx 0.919 \end{aligned}$$

3. Nej, funktionen kan inte bli en täthet för något $c > 0$ eftersom $\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{xy}\, dy dx = \infty$.

4. (a) $E[\bar{X}] = \sum_i E[X_i]/n = n\mu/n = \mu$ (Här används bara att väntevärdet är en linjär operator. Denna likhet gäller alltså även då observationerna är beroende. Men observera att alla måste ha väntevärdet μ och variansen σ^2.)

   (b) $\mathrm{Var}[\bar{X}] = \sum_i \mathrm{Var}[X_i]/n^2 = n\sigma^2/n^2 = \sigma^2/n$ (Den första likheten följer av oberoendet.)

   (c) $E[(n-1)s^2] = E[S_{xx}] = E\left[\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2\right] = \sum_i E[x_i^2] - nE[\bar{x}^2] = n(\mu^2 + \sigma^2) - n(\mu^2 + \sigma^2/n) = (n-1)\sigma^2$ (Den tredje likheten följer av linjäriteten och den fjärde av oberoendet.)

5. I formelsamlingen ses att $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$. Här är antalet frihetsgrader $n - 1 = 4$ och ur tabell fås att kvantilen $\chi^2_{0.05,4} = 0.711$.

   (a) Händelsen $(n-1)s^2/\sigma^2 \geq \chi^2_{1-\alpha,n-1}$ har sannolikheten $1-\alpha$. Således gäller att uttrycket $\sigma^2 \leq (n-1)s^2/\chi^2_{1-\alpha,n-1} \Leftrightarrow \sigma \leq \sqrt{(n-1)/\chi^2_{1-\alpha,n-1}}\, s$ efter insättning av kända och observerade värden definierar intervall av den sökta typen för σ^2 respektive σ med konfidensen $1 - \alpha$. Vi får att $\sigma \leq \sqrt{4/0.711} \cdot 2.7 = 6.404$. Hade gränsen varit ≤ 6.00, så hade vi kunnat hävda att kvalitetskravet är uppfyllt med ca 95% konfidens (säkerhet). Nu kan vi inte det.

   (b) Nivå-α-testet förkastar då $(n-1)s^2/6.00^2 \leq \chi^2_{1-\alpha,n-1}$, d.v.s då
   $$s^2 \leq 36\chi^2_{1-\alpha,n-1}/(n-1) = 6.399$$
   Då detta ej är uppfyllt, kan vi inte förkasta på nivån 5%. Inte heller nu kan vi alltså hävda att kvalitetskravet är uppfyllt med den önskade konfidensen.

   Obs att båda metoderna är ekvivalenta. Det är alltså ingen tillfällighet att de gav samma slutsats.

6. (a) Med formeln $p = \hat{p} \pm 1.96\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ där $\hat{p} = f/n$ fås $p_b = 0.73 \pm 0.09$ och $p_d = 0.04 \pm 0.04$.

(b) Teststatistika är

$$Z = \frac{\hat{p}_b - \hat{p}_d}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n_b + 1/n_d)}} \overset{\text{ap}}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

där $\hat{p} = (f_b + f_d)/(n_b + n_d)$, och H_0 kan förkastas på nivån 0.01 då observerat värde z av Z är $\geq z_{0.01} = 2.326$. Observerade värden är $\hat{p} = 77/200 = 0.385$ och $z = 10.03 > 2.326$. Vi kan således förkasta H_0 på nivån 0.01.

7. (a) Vi testar $H_0 : \sigma_N = \sigma_G$ mot $H_1 : \sigma_N < \sigma_G$. Teststatistika är $s_G^2/s_N^2 \sim F(n_G - 1, n_N - 1)$. Observerat värde $s_G^2/s_N^2 = 5.21^2/3.18^2 = 2.684$ jämförs med kvantiler i formelsamlingens F-tabell ($n_G - 1 = 23$ resp $n_N - 1 = 11$ frihetsgrader). Där ser vi att $f_{0.05,23,11} = 2.617$ och $f_{0.025,23,11} = 3.184$. Således gäller att (det ensidiga) P-värdet är < 0.05 och > 0.025. På 5%-nivån kan vi alltså förkasta $H_0 : \sigma_N = \sigma_G$ till förmån för $H_1 : \sigma_N < \sigma_G$. Vi kan därför hävda att $\sigma_N < \sigma_G$ med en felrisk $\leq 5\%$.

   (b) Eftersom det är troligt att varianserna är olika, beräknar vi Smith-Satterthwaites frihetsgradtal γ, som är heltalsdelen av

$$\frac{\left[s_N^2/n_N + s_G^2/n_G\right]^2}{\frac{\left(s_N^2/n_N\right)^2}{n_N-1} + \frac{\left(s_G^2/n_G\right)^2}{n_G-1}} \approx 32.4$$

Teststatistika vid test av $H_0 : \mu_N = \mu_G$ är

$$T = \frac{\bar{X}_N - \bar{X}_G}{\sqrt{s_N^2/n_N + s_G^2/n_G}} \overset{\text{ap}}{\sim} t(\gamma)$$

Observerat värde av T är $t = 2.207$. Detta ska jämföras med kvantilerna $t_{0.025,32} = 2.037 < t$ och $t_{0.01,32} = 2.447 > t$. Vi ser att P-värdet är < 0.025 och > 0.01 (ensidigt test). Vi kan därför hävda att $\mu_N > \mu_G$ med en felrisk $\leq 5\%$.

Notera att när vi samtidigt påstår att $\sigma_N < \sigma_G$ med en felrisk som är $\leq 5\%$ och att $\mu_N > \mu_G$ med en felrisk $\leq 5\%$, så följer att den totala risken för fel (fel begås om ett eller båda två påståendena är osanna) är $\leq 10\%$. Detta följer ifrån Booles olikhet, som säger att $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

8. Vi får att $\bar{x} = 0.0492$ och $\bar{y} = 0.03$ samt att $S_{xx} = \sum x^2 - n\bar{x}^2 = 3.269484$, $S_{yy} = \sum y^2 - n\bar{y}^2 = 2.1875$ och $S_{xy} = \sum xy - n\bar{x}\bar{y} = 1.3931$. Härur fås att $\hat{\rho} = S_{xy}/\sqrt{S_{xx}S_{yy}} \approx 0.521$ (ρ betecknar korrelationen). Teststatistika vid test av $H_0 : \rho = 0$ är

$$T = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}} \sim t(n-2)$$

Observerat värde av teststatistikan är $t = 2.927$. Detta ska jämföras med kvantiler i $t(23)$-fördelningen. En titt i formelsamlingens t-tabell ger att $t > t_{0.005,23} = 2.807$. P-värdet blir följaktligen $< 2 \cdot 0.005 = 0.01$ (testet är ju två-sidigt). Vi kan alltså hävda att $\rho \neq 0$ med konfidensen minst ca 99% (vilket är samma sak som att säga att risken att vi har fel när vi hävdar att $\rho \neq 0$ ej är större än ca 1%).