Chalmers
Matematiska vetenskaper

TMS051: Matematisk statistik för Z, del A

Tentamen 25 oktober 2003 em V

Detta är även omtentamen på TMS050 Matematisk statistik för Z, del A.

Tillåtna hjälpmendel är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p.

Jour är

Examinator är Tommy Norberg (ankn 3528 eller 0730 794209).

Observera att svar skall motiveras i samtliga 8 uppgifter om ej annat sägs.

Uppgifter

1. En godsterminal har 8 lastbryggor. För var och en av dessa gäller ett av följande: lastbryggan är i funktion och ledig, lastbryggan är i funktion och upptagen, lastbryggan är ej i funktion. Beräkna m.h.a den klassiska sannolikhetsdefinition sannolikheten för händelsen att

   (a) totalt 7 lastbryggor är i funktion, varav 3 är upptagna och 4 lediga, (2 p)

   (b) totalt 7 st lastbryggor är i funktion. (2 p)

2. Låt händelserna A, A^c och B ha strikt positiva sannolikheter. Då gäller att

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)}$$

   Visa detta. (4 p)

3. (a) Kan funktionen $f(x) = c\sin x$ för något värde på konstanten c fungera som täthet för en stokastisk variabel X med utfallsrum $0 \leq x \leq \pi$? (1 p)

   (b) Vad är isåfall c:s exakta värde? (1 p)

   (c) Vad är isåfall $\mu = E[X]$ och $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$? (2 p)

4. Man avser kasta ett symmetriskt mynt 100 gånger och räkna antalet gånger det landar med krona upp. Låt f vara detta antal.

   (a) Vilken fördelning har f? (2 p)

   (b) Beräkna approximativt $P(40 \leq f \leq 60)$. (2 p)

5. I en övervakningsanläggning sker larm enl en Poissonprocess med intensiteten λ st per tidsenhet. Låt W vara tiden tills larmet går första gången. Vilken fördelning har W? Vilket väntevärde har W? (4 p)

(Vänd!)

6. Antag att de stokastiska variablerna X, Y har tätheten

$$f(x,y) = \frac{x}{4\sqrt{y}} \quad \text{för} \quad 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1$$

   (a) Beräkna $\mathrm{Cov}[X,Y]$. (1 p)

   (b) Beräkna $P(X \leq 1)$. (1 p)

   (c) Antag att man har utfört ett slumpmässigt försök i vilket resultatet är (X,Y) och att man har fått reda på att $Y > 0.5$. Inget mer är känt om försöksresultatet. Är då den betingade sannolikheten för händelsen $X \leq 1$ skild från eller lika med sannolikheten du skulle räkna ut i uppgift 6b? (1 p)

7. För att skaffa sig erfarenhet av en ny metod att mäta ytnoggranhet gjorde man 30 st oberoende mätningar av en speciell testyta. Stickprovet fick standardavvikelsen $s = 3.562$. Bestäm under normalfördelningsantagande ett uppåt begränsat konfidensintervall för mätmetodens standardavvikelse σ med konfidensgrad 0.95. (3 p)

8. Antag att man har utfört n st oberoende försök i vilka försöksresultatet är $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$-fördelat. Låt $\bar{x}, s$ vara stickprovets medelvärde resp standardavvikelse.

   (a) Visa att intervallskattningen

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1} s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1} s/\sqrt{n}$$

   har konfidensen $1-\alpha$ (kvantilen $t = t_{\alpha/2,n-1}$ definieras av att $P(T > t) = \alpha/2$ för $T \sim t(n-1)$). Det är tillåtet att utgå ifrån ett lämpligt resultat i formelsamlingen. (3 p)

   (b) Om normalfördelningsantagandet skulle vara tveksamt, går det då ändå att säga något om intervallets konfidens? (1 p)