Lösningar eller svar till Matematisk statistik för Z, del A den 28/8-03

1. Låt S betyda att individen har sjukdomen och D att den detekteras. Följande är givet: $P(S) = 1/20 = 0.05$, $P(D|S) = 0.9$ och $P(D|S^c) = 0.2$. Bayes formel ger

$$P(S|D) = \frac{P(S)P(D|S)}{P(S)P(D|S) + P(S^c)P(D|S^c)} = \frac{0.05 \cdot 0.9}{0.05 \cdot 0.9 + 0.95 \cdot 0.2} \approx 0.191$$

2. Y är likformigt fördelad på $\{0,1,2,3,4\}$. Härur följer att

$$E[Y] = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} + \ldots + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(0+1+2+3+4) = 2$$

Analogt fås

$$E[Y^2] = \frac{1}{5}(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 6 \quad \Rightarrow \mathrm{Var}[Y] = 6 - 2^2 = 2$$

3. (a) De fyra möjliga genotyperna för avkomman är RR, Rr, RY och rY. De har p.g.a slumpmässigheten all sannolikheten 1/4. Således är svaret på uppgiften 1/2—det är ju bara genotyperna RY och rY som svarar mot manligt kön och av dessa indikerar endast rY färgblindhet.

   (b) Av det som just sagts förstår vi också att sannolikheten att avkomman är en färgblind pojke är $1/4 = 0.25$. Antalet färgblinda pojkar i en kull om 5 barn är $\mathrm{Bin}(5, 0.25)$. Således blir den sökta sannolikheten

$$\sum_{k=2}^{5} \binom{5}{k} 0.25^k \cdot 0.75^{5-k} = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{5}{k} 0.25^k \cdot 0.75^{5-k}$$

$$= 1 - 0.75^5 - 5 \cdot 0.25 \cdot 0.75^4 \approx 0.367$$

4. (a) $e^{-1} \approx 0.37$

   (b) $e^{-1} \approx 0.37$ p.g.a exponentialfördelningens glömskeegenskap.

5. X.s fördelningsfunktion fås enligt

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \int_0^5 \frac{1}{10}\, dydz = \int_0^x \frac{1}{2}\, dz = \frac{x}{2}$$

för $0 \leq x \leq 2$. Således är X:s täthet

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{1}{2}$$

och vi ser att X är likformigt fördelad på $(0,2)$. Analogt inses att Y:s täthet är

$$f(y) = \frac{1}{5}$$

för $0 < y < 5$ och därför likformigt fördelad på $(0,5)$. Vi ser nu också att X och Y är oberoende, ty

$$f(x,y) = \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = f(x)f(y)$$

6. Kalla tätheten för $f(x;\theta)$ och låt beteckna $x_1, \ldots, x_n$ observationerna.

   (a) Beräkna medelvärdet $\bar{x}$ och lös ut θ ur $\bar{x} = \int_R x f(x;\theta)\, dx$. Idéen i momentmetoden är ju att byta ut μ mot $\bar{x}$ i formeln $\mu = \int_R x f(x;\theta)\, dx$.

(b) Bilda trolighetsfunktionen

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n; \theta)$$

och sök det θ som maximerar $L(\theta)$. Detta värde på θ kommer ju då att bero av observationerna $x_1, \ldots, x_n$, så det blir en legitim punktskattning av parametern θ.

7. Låt $x_1, \ldots, x_n$ beteckna observationerna och $X_1, \ldots, X_n$ motsv stokastiska variabler. Notera först att

$$(n-1)S^2 = \sum_i (X_i - \bar{X})^2 = \sum_i X_i^2 - n\bar{X}^2$$

(Den som inte kommer ihåg detta får naturligtvis härleda uttrycket.) Vi får nu att

$$E[(n-1)S^2] = \sum_i E[X_i^2] - nE[\bar{X}^2] = nE[X_1^2] - nE[\bar{X}^2]$$

Notera att

$$E[X_1^2] - E[X_1]^2 = \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad E[X_1^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

där $\mu = E[X_1]$. Analogt

$$E[\bar{X}^2] = \mathrm{Var}[\bar{X}] + E[\bar{X}]^2 = \sigma^2/n + \mu^2$$

Vi får följaktligen att

$$E[(n-1)S^2] = n(\sigma^2 + \mu^2) - n(\sigma^2/n + \mu^2) = (n-1)\sigma^2$$

vilket visar att S^2 skattar σ^2 väntevärdesriktigt.

8. (a) Börja med att räkna ut att $\bar{x} = 10.24$ och att $s = 2.269$. Ur tabell fås $t_{0.025}(4) = 2.776$. Felet med konfidens 95% är

$$2.776 \cdot 2.269/\sqrt{5} = 2.817 \approx 2.82$$

och $\mu = 10.24 \pm 2.82$ är den sökta punkt- och intervallskattningen. Ett alternativ sätt att ge intervallskattningen är $\mu \in (7.42,\ 10.06)$. Punktskattningen av μ är $\widehat{\mu} = 10.24$.

(b) Det är oerhört viktigt att observationerna är oberoende.