Lösningar till Matematisk statistik för Z, del A den 16/1-03

1. (a) De är ej oberoende eftersom $0 = P(A \cap B) \neq P(A)P(B) > 0$

   (b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.23 + 0.27 = 0.50$

2. (a) $\binom{5}{3} = 10$

   (b) $\binom{10}{3} \cdot 3! = 720$

3. Bayes formel ger att den sökta sannolikheten är $\dfrac{0.7 \cdot \frac{2}{5}}{0.7 \cdot \frac{2}{5} + 0.3 \cdot \frac{19}{20}} = \dfrac{56}{56+57} \approx 0.50$

4. $m_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^\infty \lambda e^{tx-\lambda x}\, dx = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$ för $t < \lambda$. Härur fås att $m_X'(t) = \dfrac{\lambda}{(\lambda-t)^2}$ och $m_X''(t) = \dfrac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$. Således är $E[X] = m_X'(0) = \dfrac{1}{\lambda}$ och $E[X^2] = m_X''(0) = \dfrac{2}{\lambda^2}$ och det följer att $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

5. Trolighetsfunktionen är $L(p) = p^{\sum_i x_i}(1-p)^{n-\sum_i x_i}$, ty sannolikheten för utfallet $x_1, \ldots, x_n$ är produkten av n faktorer där den i:te $= p$ om $x_i = 1$ och $= 1-p$ om $x_i = 0$. Vi logaritmerar troligheten eftersom den är lättare att maximera: $\mathcal{L}(p) = (\sum_i x_i) \ln p + (n - \sum_i x_i) \ln(1-p)$. Vi får nu att $\mathcal{L}'(p) = \dfrac{\sum_i x_i}{p} - \dfrac{n - \sum_i x_i}{1-p}$ och ur $\mathcal{L}'(p) = 0$ följer $p = \dfrac{\sum_i x_i}{n}$. Trolighetsskattningen av p är alltså $\widehat{p} = \dfrac{\sum_i x_i}{n}$, v.s.v.

6. (a) $\widehat{p} \pm 1.96\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/n} = 0.65 \pm 0.093$

   (b) Man kan kanske misstänka att myntet ej är symmetriskt, eftersom 0.5 ligger utanför konfidensintervallet. Faktum är att ett test av $H_0 : p = 0.5$ mot $H_1; p \neq 0.5$ på nivån 0.05 skulle förkasta H_0.

7. $\mu \pm t_{0.005}(24)s/\sqrt{n} = 10.3 \pm 2.797 \cdot 2.75/\sqrt{25} = 10.3 \pm 1.54$

8. Låt X vara normalfördelad med väntevärde μ och standardavvikelse σ och låt Z vara standard normal. Den sökta kvantilen, $x_{0.95}$, definieras av att $P(X \leq x_{0.95}) = 0.95 \Rightarrow P(Z \leq (x_{0.95} - \mu)/\sigma) = 0.95 \Rightarrow (x_{0.95} - \mu)/\sigma = 1.645 \Rightarrow x_{0.95} = \mu + 1.645\sigma$. Skattningarna av μ resp σ är $\bar{x}$ och s. Således skattar summan $\bar{x} + 1.645s$ 0.95-kvantilen $x_{0.95}$. Svaret på frågan är alltså ja, det går, och skattningen av 0.95-kvantilen är $\widehat{x}_{0.95} = \bar{x} + 1.645s \approx 14.8$.