

TMS050: Matematisk statistik för Z, del A

Tentamen 26 oktober 2002 em V

Tillåtna hjälpmedel är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p. Ev bonus från inlämningsuppgifterna adderas till totalpoängen innan betyg sättes.

Jour är Yulia Yurgens (ankn 3582).

Uppgifter

1. Låt $X \sim \text{Bin}(2, 1/3)$ och antag att händelsen A är sådan att $P(A|X = 0) = P(A|X = 1) = \frac{1}{4}$ och $P(A|X = 2) = 1$.

(a) Är A och X oberoende? (1 p)

(b) Beräkna $P(A)$. (1 p)

(c) Beräkna $P(X = 2|A)$. (1 p)

2. Låt T vara tiden tills första impulsen i en Poissonprocess med intensitet λ impulser per tidsenhet. Visa att T är Exponentialfördelad med väntevärde $E[T] = 1/\lambda$? (4 p)

3. En viss typ av mätvärden antas vara normalfördelade med väntevärde $\mu = 5.5$ och standardavvikelse $\sigma = 2.2$. Antag att du ska göra 3 oberoende mätningar. Hur stor är sannolikheten att åtminstone 2 av dessa ligger i intervallet $[3.3, 7.7]$? (3 p)

4. Paret X, T är kontinuerligt fördelat med tätheten

$$f(x, t) = \frac{1}{t} e^{-t}, \quad t > x > 0$$

(a) Bestäm T 's täthet. (2 p)

(b) Bestäm $E[X]$. (2 p)

5. Låt X_1, \dots, X_n vara oberoende och likafördelade stokastiska variabler med väntevärde μ och standardavvikelse σ . Låt \bar{X} vara medelvärdet och S^2 stickprovsvariansen. Visa att

(a) S^2 väntevärdesriktigt skattar σ^2 , (2 p)

(b) $\text{Var}[\bar{X}] = \sigma^2/n$, (1 p)

(c) $P(|\bar{X} - \mu| > \epsilon) \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. (3 p)

I (c) är $\epsilon > 0$ godtyckligt.

6. Felsannolikheten p för en viss produktionsprocess får som mest vara 0.05. Man producerar satsar om N st enheter åt gången. Efter det att en sats är färdigproducerad, måste man medelst kontroll av $n = 200$ producerade enheter säkerställa att $p < 0.05$, innan produktionen av en ny sats får påbörjas. Man tar alltså här ett kundperspektiv. Antag att satsstorleken N är så stor att fördelningen för f , antalet funna felaktiga, väl approximeras av $\text{Bin}(n, p)$ om man slumpmässigt väljer ut $n = 200$ st enheter för kontroll.

- (a) Formulera detta som ett statistisk testproblem, låt nivån vara α och konstruera testet. (3 p)
- (b) Vid ett tillfälle fann man $f = 4$ st felaktiga enheter. Behöver processen justeras om man väljer nivån $\alpha = 0.05$? (1 p)
7. Vid ett tillfälle gjorde man $n = 30$ oberoende bestämningar av hållfastheten för en viss stålqualität. Därvid erhöles medelvärdet $\bar{x} = 63.42$ och standardavvikelsen $s = 10.451$. Beräkna ett ca 95% konfidensintervall för hållfastheten ifråga. (3 p)
8. Vid ett annat tillfälle (j.f.r uppgift 7) gjorde man $n = 32$ oberoende bestämningar av hållfastheten för en viss annan stålqualität. Därvid erhöles medelvärdet $\bar{x} = 59.34$ och standardavvikelsen $s = 9.378$.
- (a) Beräkna under antagande om lika varians ett konfidensintervall för differensen av hållfastheterna. Konfidensgraden ska vara 0.90. (2 p)
- (b) Kan det anses statistiskt säkerställt på nivån 0.10 att hållfastheterna för de två kvaliteterna är olika? (1 p)

Lycka till!