Lösningar till Matematisk statistik för Z, del A den 21/8-02

1. Notera först att $0 \leq x \leq \min(k, d)$ och att man totalt kan göra $\binom{n}{k}$ olika val om hänsyn ej tas till ordningen. Man kan välja ut x enheter bland de d defekta på $\binom{d}{x}$ sätt och $k-x$ enheter bland de $n-d$ felfria på $\binom{n-d}{k-x}$ sätt, så antalet sätt att välja x defekta blir enligt multiplikationsprincipen $\binom{d}{x}\binom{n-d}{k-x}$. Den sökta sannolikheten är därför

$$p(x) = \frac{\binom{d}{x}\binom{n-d}{k-x}}{\binom{n}{k}}$$

2. Bayes formel ger $(0.4 \cdot 0.01)/(0.4 \cdot 0.01 + 0.6 \cdot 0.995) = 0.004/0.601 \approx 0.006656$ (rita träddiagram).

3. Det är rimligt att tänka sig varje födsel som resultatet av oberoende försök, där sannolikheten för att barnet ska bli brunögd är $3/4$. Rimligen är alltså X Binomialfördelad med parametrar $n = 4$ försök och sannolikheten $p = 3/4$. Då blir $E[X] = 4 \cdot 3/4 = 3$. Men man behöver inte förutsätta oberoende ty om X_i, för $i = 1, 2, 3, 4$, är lika med 1 om barn nummer i är brunögt och 0 annars, så är $E[X_i] = 3/4$ och $E[X] = E[X_1 + \ldots + X_4] = E[X_1] + \ldots + E[X_4] = 4 \cdot 3/4 = 3$ (väntevärdesoperatorn är ju additiv). Båda lösningarna är godkända.

4. (a) Momentgenererande funktion definieras i definition 3.4.2. (b) Se beviset av sats 3.4.2.

5. Centrala gränsvärdessatsen ger att S är approximativt normalfördelad med väntevärde $100 \cdot 0.05 = 5$ och standardavvikelse $\sqrt{100} \cdot 0.2 = 2$, så den sökta sannolikheten är ungefär lika med 0.95 (sannolikheten att en normalvariabel ligger inom ± 2 standardavvikelser är ju ca 0.95). (Den som tror att standardavvikelsen är $100 \cdot 0.2 = 20$ får 2 p avdrag.)

6. För $0 \leq x \leq 10$ gäller

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_0^{\frac{3x}{2}} \frac{1}{75}\, dy = \frac{x}{50}$$

   ty $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{75}$ för (x, y) uppfyllande $0 \leq x \leq 10$ och $0 \leq y \leq \frac{3x}{2}$ (arean av denna triangel är ju $\frac{10 \cdot 15}{2} = 75$).

7. Konfidensen är 0.99, ty $(2.28 - 0.02)/2 = 1.13$ och $t \cdot 1.10/\sqrt{10} = 1.13$ löses av $t = 1.13 \cdot \sqrt{10}/1.10 \approx 3.25$ och 0.5%-kvantilen i t-fördelningen med 9 frihetsgrader är enligt tabell ca 3.25.

8. I termer av statistiska hypotestest ska man alltså testa nollhypotesen $H_0 : p = 0.4$ mot alternativet $H_1 : p > 0.4$. Låt $\hat{p}$ vara proportionen lyckade försök. Under H_0 är $\hat{p}$ approximativt normalfördelad med väntevärde 0.4 och varians $0.4 \cdot 0.6/100 = 0.0024$ (frekvensen lyckade försök är ju under H_0 $\text{Bin}(100, 0.4)$). Den 99:e percentilen (0.99-kvantilen) i den standardiserade normalfördelningen är $z_{0.99} = 2.32635$, så H_0 förkastas på nivån 0.01 om

$$\frac{\hat{p} - 0.4}{\sqrt{0.0024}} > 2.32635$$

d v s om $\hat{p} > 0.41$. Detta renderar 2 p. Ytterligare 2 p får de som lyckas beräkna sannolikheten att detta inträffar om $p = 0.45$:

$$P(\hat{p} > 0.41) = P\left(\frac{\hat{p} - 0.45}{\sqrt{0.45 \cdot 0.55/100}} > \frac{0.41 - 0.45}{\sqrt{0.45 \cdot 0.55/100}}\right) \approx 1 - \Phi(-0.80) = \Phi(0.80) \approx 0.79$$

enligt centrala gränsvärdessatsen.