TMS050: Matematisk statistik för Z, del A

Tentamen 27 oktober 2001 e M

Tillåtna hjälpmendel är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p.

Jour är Ulrica Olofsson (ankn 5336).

Uppgifter

1. I tillverkningen av en viss motordel kan fel av två typer förekomma. Låt oss kalla dem typ A och B. Medelst långvariga mätningar har man övertygat sig om att A förekommer i 2.8%, att B förekommer i 7.2% och att både A och B förekommer i 0.2% av motordelarna.

   a) Hur stor del av produktionen sker utan något av de två felen? (1 p)

   b) Förekommer felen oberoende av varandra? (1 p)

   c) Antag att du håller i en motordel som är behäftad med ett fel av typ B. Hur stor är sannolikheten att den även har felet A? (2 p)

2. Låt $0 < p < 1$ och definiera

   $$f(k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

   Visa att detta är en sannolikhetstäthet för en diskret stokastisk variabel X och beräkna $P(X > k)$ för $k = 0, 1, \ldots$. (4 p)

3. Man räknar med att en viss processor har en livstid som är exponentialfördelade med väntevärdet 10 000 timmar. Beräkna a) sannolikheten p att processorn fungerar i mer än 20 000 timmar. För att öka funktionssäkerheten installerar man en "back-up"-processor av samma typ. Beräkna b) sannolikheten att någon av processorerna fungerar i minst 20 000 timmar. Antag att processorernas livslängder är oberoende. (4 p)

4. I ett exempel i läroboken studerar man trycket inomhus, X, och trycket utomhus, Y, och man antager att den två dimensionella tätheten för X, Y är av typen

   $$f_{X,Y}(x, y) = c/x, \quad 27 \leq y \leq x \leq 33$$

   a) Visa att $c = 1/(6 - 27\ln(33/27)) \approx 1.72$. (2 p)

   b) Härled X:s och Y:s marginaltätheter. (2 p)

   c) Beräkna $P(X \leq 30, Y \leq 28)$. (1 p)

5. Antag att du har ett stickprov (d v s oberoende observationer) $x_1, \ldots, x_n$ på en kontinuerlig stokastisk variabel X, vars täthet är

   $$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

   för något $\lambda > 0$. Härled trolighetsskattningen av λ. Är den väntevärdesriktig? (4 p)

(vänd)

6. Du avser att utföra 50 oberoende försök i syfte att visa att en viss händelses sannolikhet p är strikt större än dess nominella värde som är $p = 0.2$. Din vän, som råkar arbeta på en statistisk konsultbyrå, säger lite slarvigt att du kan räkna med att $p > 0.2$ ifall händelsen inträffar 16 eller fler gånger då du gör dina 50 försök.

   a) Formulera noll- och alternativhypotes för det test din vän menar att du ska göra. (1 p)

   b) Ungefär på vilken nivå är detta test? (1 p)

   c) Antag att det verkliga värdet på sannolikheten är $p = 0.25$. Ungefär hur stor är då sannolikheten att testet förkastar? (1 p)

7. Mängden koppar per 1000 kg malm antas i ett visst område vara normalfördelad med väntevärde μ och standardavvikelse σ. I ett försök att skatta μ erhölls följande observationer:

$$12.5, \quad 10.7, \quad 10.5, \quad 12.4, \quad 12.5, \quad 15.5, \quad 11.3$$

   Punkt- och intervallskatta μ. Konfidensgraden ska vara 0.95. (3 p)

8. Man ville jämföra resultaten från två olika sätt att välja ut och fråga om partisympatier. Med metod A hittades $x_A = 113$ sympatisörer till parti X bland $n_A = 735$ tillfrågade väljare. Med metod B hittades $x_B = 102$ sympatisörer till parti X bland $n_B = 840$ tillfrågade väljare. Låt p_A resp p_B vara proportionen väljare som uppger att de sympatiserar med parti X då de tillfrågas som i metod A resp B. Punkt- och intervallskatta differensen $p_A - p_B$. Konfidensgraden ska vara ca 0.95. Anser du att det är statistiskt säkerställt på nivån 5% att $p_A \neq p_B$? (3 p)

Lycka till!