

---

## Omtentamen

i kursen

# Matematisk statistik och diskret matematik

---

**Hjälpmedel:** Allt i form av beräkningshjälp, anteckningar eller litteratur är tillåtet. Det är dock inte tillåtet att kommunicera muntligt/skriftligt med någon annan person (utöver tentavakt/examinator) eller att göra information tillgänglig till andra på något sätt.

**Examinator:** Timo Vilkas

**OBS!** Markera tydligt på varje inlämnat blad, vilken uppgift det gäller. Använd inte samma sida till flera uppgifter (olika deluppgifter på samma sida går bra). Ange svar tydligt, förenkla svaret så långt som möjligt, och motivera dina svar väl. Var noga med att förklara vad du gör, hur och varför. Det är i hög grad lösningen som ger poäng, inte själva svaret. Även ofullständig eller bristfällig lösning kan ge poäng, så försök även om du är osäker. Tänk också på att inte fastna för länge i någon uppgift!

För betyg 3 (godkänt) krävs 12 poäng. Chalmers studenter får betyg 4 med 18 poäng och betyg 5 med 24 poäng. För GU studenter krävs 22 poäng för betyg VG.

---

**Uppgift 1.** Ett symmetriskt mynt kastas 10 gånger (med oberoende utfall). Låt  $X$  räkna antalet gånger krona kommer upp bland dessa 10 försök.

- (a) Bestäm fördelningen av  $X$  och beräkna sannolikheten  $\mathbb{P}(X = 5)$ . (1p)
- (b) Beräkna sannolikheten  $\mathbb{P}(X \geq 9)$ . (1p)
- (c) Vad är sannolikheten att det kom två gånger krona inom de första tre omgångar givet att  $X = 4$ ? (2p)

*Ledning:* Försök relatera problemet till den hypergeometriska fördelningen.

**Uppgift 2.** I en beteendestudie visades 1000 bilder till 1000 spädbarn och deras reaktion noterades. Bilden visade antingen en glad, en neutral eller en trist stämning och reaktionen kunde vara road, neutral eller sorgsen. Låt  $X$  stå för bilden som visades och  $Y$  för reaktionen, där  $X = 1$  (resp.  $Y = 1$ ) står för glad (road),  $X = 0$  (resp.  $Y = 0$ ) för neutral och  $X = -1$  (resp.  $Y = -1$ ) för trist (sorgsen).

Det visades 300 glada, 300 trista och 400 neutrala bilder. Av barnen som fick se en glad bild verkade 165 roade, 30 bekymrade, av dem som fick se en trist bild verkade 84 bekymrade och bara 18 roade. 60 barn reagerade roat, 292 neutralt på en neutral bild.

- (a) Ange sannolikhetsfunktionen till den gemensamma fördelningen av ett slumpat bild-reaktion-par  $(X, Y)$ . (2p)

- (b) Hur stor är sannolikheten att bild och reaktion matchar, dvs.  $X = Y$  för ett (likformigt) slumpat barn? (1p)
- (c) Hur stor är sannolikheten att det var en glad bild som visades givet att barnet visade en glad reaktion? (1p)

**Uppgift 3.** Låt  $(X,Y)$  vara en kontinuerligt fördelad slumpvektor med täthetsfunktion

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}, \quad \text{för alla } x,y \geq 0.$$

- (a) Beräkna väntevärden  $\mathbb{E}(X)$  och  $\mathbb{E}(Y)$  samt kovariansen  $\text{Cov}[X,Y]$ .  
Är  $X$  och  $Y$  oberoende? (2p)
- (b) Beräkna den betingade sannolikheten  $\mathbb{P}(X \leq 1 | Y \geq 1)$ . (1p)

**Uppgift 4.** Ett simpelt hasardspel går ut på att du rullar en vanlig symmetrisk tärning (i oberoende omgångar) tills du antingen får en etta, i vilket fall du förlorar, eller två sexor i rad, i vilket fall du vinner.

- (a) Definera en Markovkedja, med tillståndsrum och motsvarande övergångssannolikheter, som beskriver spelet på ett sätt att absorberande tillstånd motsvarar händelser som avslutar spelet. (2p)
- (b) Beräkna det förväntade antalet gånger du rullar tärningen innan spelet är över. (2p)
- (c) Hur stor måste vinsten vara om det kostar en krona att spela spelet, så att spelet är rättvist (vilket betyder att du i medelvärde varken vinner eller förlorar pengar när du spelar det)? (1p)

**Uppgift 5.** En tillverkare säljer standard latexhandskar av tjocklek 0.12mm. Det är ett rimligt antagande att den verkliga tjockleken är normalfördelad med väntevärde 120 mikrometer och okänd varians  $\sigma^2$ . Ett stickprov ur produktionen analyseras och följande tjocklekar mäts [i  $\mu\text{m}$ ]:

121.5	120.2	119.1	120.1	122.0
121.1	120.3	119.8	121.6	120.3

Bestäm ett 95% konfidensintervall för tjocklekens varians och standardavvikelse. (3p)

**Uppgift 6.** I en undersökning svarade 207 av 1000 personer att de avstod från att resa utomlands sedan pandemin började.

- (a) Detta tas som en apriori-skattning att ungefär 20% av alla svenskar inte lämnade landet sedan pandemins början. Hur många personer bör en större studie minst omfatta, så att man kan vara 95% säker på att det skattade värdet inte avviker mer än 1%, alltså 0.01, ifrån den verkliga proportionen baserad på denna apriori skattning? (1p)
- (b) En större studie med 10.000 personer visar att 2091 av dem undvek internationella resor sedan pandemin började. Genomför ett ensidigt hypotestest till signifikansnivå  $\alpha = 0.05$  och ta ställning till antagandet att andelen inte är större än 20%. (2p)

**Uppgift 7.** (a) Använd en genererande funktion för att beräkna på hur många olika sätt man kan fördela 10 identiska bollar i 4 olika korgar om varje korg ska innehålla minst en och högst fyra bollar. (2p)

(b) Du kommer bara ihåg att de enda bokstäver du använde i ditt lösenord är  $\{a,b,c\}$ , att det är fem bokstäver långt och innehåller minst två  $a$ , högst tre  $b$  och ett udda antal  $c$ . Hur många bokstavskombinationer måste du i värsta fall testa? (2p)

**Uppgift 8.** Tabellen nedanför återger priser  $p_i$  [i SEK] för taxiresor inom Göteborgsområdet. Distansen av resan  $d_i$  [i km] kan anses som förklarande variabel.

$d_i$	6.6	2.5	25.8	11.2	2.4	8.0	5.5	24.3	4.2
$p_i$	150	105	487	220	90	185	140	475	132

$$\sum_{i=1}^9 d_i = 90.5 \quad \sum_{i=1}^9 p_i = 1984$$

$$\sum_{i=1}^9 d_i^2 = 1549.03 \quad \sum_{i=1}^9 p_i^2 = 624068 \quad \sum_{i=1}^9 d_i p_i = 30844$$

(a) Bestäm regressionslinjen för priset av en taxiresa med distansen som förklarande variabel utifrån datapunkterna. (2p)

(b) Finns det ett signifikant linjärt samband mellan distans och pris av taxiresor inom Göteborgsområdet?

Formulera en motsvarande nollhypotes och pröva den på signifikansnivå  $\alpha = 0.1$ . Som vanligt antar vi normalfördelade fel med okänd varians  $\sigma^2$ . (2p)