Facit till omtentan 25-08-2021

Uppgift 1

(a) X är en summa av 10 oberoende $Ber(\frac{1}{2})$ s.v.

$\Rightarrow X \sim Bin(10, \frac{1}{2})$ (binomial, $n=10$, $p=\frac{1}{2}$).

$\mathbb{P}(X=5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.246$

(b) $\mathbb{P}(X \geq 9) = \mathbb{P}(X=9) + \mathbb{P}(X=10) = 0.0098 + 0.00098 \approx 0.01$

(c) Givet $X=4$ (4 av 10 försök kom krona) är antalet gånger krona kommer inom de första tre försök $Y \sim HypGeo(10, 4; 3)$ då vi väljer 3 utav 10, varav 4 har en viss egenskap.

$$\mathbb{P}(Y=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$$

Uppgift 2

(a)

$X \backslash Y$	-1	0	1	
-1	$\frac{84}{1000}$	$\frac{198}{1000}$	$\frac{18}{1000}$	$\frac{3}{10}$
0	$\frac{48}{1000}$	$\frac{292}{1000}$	$\frac{60}{1000}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{30}{1000}$	$\frac{105}{1000}$	$\frac{165}{1000}$	$\frac{4}{10}$
	0.162	0.595	0.243	

(b) $P(X=Y) = \dfrac{84+292+165}{1000} = 0.541$.

(c) $\mathbb{P}(X=1 \mid Y=1) = \dfrac{\mathbb{P}(X=1, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \dfrac{165/1000}{243/1000} \approx 0.679$.

Uppgift 3

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}, \quad x,y \geq 0$$

(a) $f_X(x) = \int_{y=0}^{\infty} f(x,y)\,dy = e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_0^{\infty} = e^{-x}$; Symmetri i x,y: $f_Y(y) = e^{-y}$

$\Rightarrow f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \Rightarrow X, Y$ oberoende.

- $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ (då oberoende implicerar okorrelerade)
- $\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x}\,dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1$; symmetri: $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X = 1$.

(b) $P(X \leq 1 \mid Y \geq 1) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{\mathbb{P}(X \leq 1, Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)} \overset{\text{ober.}}{=} \mathbb{P}(X \leq 1) = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 - e^{-1} \approx 0.632$.

Uppgift 4

(a) $S = \{1, 2, 3, 4\}$ där tillstånden betyder:

1 : det har kommit varken en etta eller en sexa sist
2 : det har kommit en sexa sist men varken sexa eller etta i omgången innan dess
3 : det har kommit två raka sexor sist
4 : det har kommit en etta sist.

Då följer omedelbart $p_{33} = p_{44} = 1$ (spelet slutar, absorberande tillstånd)

$p_{11} = \frac{4}{6}$ (spelet fortsätter, det krävs att rulla något ifrån $\{2,3,4,5\}$ för att förbli i tillstånd 1)

$p_{12} = \frac{1}{6} = p_{14}$ och $p_{13} = 0$

Analogt $p_{21} = \frac{4}{6}$, $p_{22} = 0$, $p_{23} = p_{24} = \frac{1}{6}$.

$$\Rightarrow \quad P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \ \ Q & & \ \ R & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 2/3 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) $N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ -2/3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{9}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 & 3/4 \\ 3 & 3/2 \end{pmatrix}$

$d = N \cdot \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 21/4 \\ 9/2 \end{pmatrix}$; det tar alltså $\frac{21}{4}$ steg till absorption (spelet startar uppenbarligen i tillstånd 1).

(c) $B = NR = \begin{pmatrix} 1/8 & 7/8 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$; slh. att (efter start i 1) förlora är $\frac{7}{8}$, att vinna $\frac{1}{8}$.

Med en vinst på V kronor när spelet slutar på två raka sexor blir den förväntade vinsten: $E(\text{vinst}) = \frac{7}{8} \cdot (-1) + \frac{1}{8}(V - 1) = \frac{V}{8} - 1$

Spelet är alltså rättvist om $V = 8$.

Uppgift 5

Först beräknas vi utfallet för stickprovsvariansen

$s^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{15}{18} \approx 0.833$, där $\bar{X} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} X_i$ är stickprovets medelvärde (med utfall $\bar{x} = 120.6$ här).

Då $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ har en χ^2-fördelning med $n - 1 = 9$ frihetsgrader (före läsning 8) letar vi efter $q_{0.025} = 2.70$ och $q_{0.975} = 19.0$ i tabellen (s. 695, rad 9) och får ett 95%-K.I. för σ^2 som $\left(\frac{(n-1)s^2}{q_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{q_{\alpha/2}}\right) = (0.395, 2.778)$

och motsvarande för σ: $(0.628, 1.667)$.

Uppgift 6

(a) Med $\hat{p} = 0.2$ och $d = 0.01$ ska en undersökning omfatta minst

$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \, \hat{p}(1-\hat{p})}{d^2}$ personer (se förel. 10) där $z_{\alpha/2} = 1.96$

är 0.975-kvantilen till standard normalfördelningen (s. 698).

Här: $n = 6146.56$, alltså minst 6150 personer.

(b) $H_0: p = 0.2$, $H_1: p > 0.2$, $z = (\hat{p} - p_0) \cdot \sqrt{\frac{n}{p_0 \cdot (1-p_0)}}$ är i det närmaste standard normalfördelad med kritiskt värde $z_{0.05} = 1.645$.

Utfallet $z = \left(\frac{2091}{10000} - 0.2\right) \cdot \sqrt{\frac{10000}{0.2 \cdot 0.8}} = 2.275 > z_{0.05}$

Antagandet är alltså orimligt (nollhypotesen bör förkastas).

Uppgift 7

(a) Vi letar efter heltalslösningar till $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ där $1\le x_1,x_2,x_3,x_4\le 4$.
Motsvarande gen. funktion är

$$(x+x^2+x^3+x^4)^4 = x^4(1+x+x^2+x^3)^4 = x^4\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^4$$
$$= (x-x^5)^4\cdot\frac{1}{(1-x)^4} = (x-x^5)^4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n \quad \text{(se förel. 11)}$$
$$= (x^4-4x^8+\dots)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n$$

Koefficienten framför x^{10} ges alltså av $\binom{6+3}{3}-4\binom{2+3}{3}=\binom{9}{3}-4\binom{5}{3}=44$.

(b) Nu, när ordningen spelar roll behöver vi använda exponentiella gen. funktioner, i det här fallet

$$g(x)=\underbrace{\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)}_{a}\underbrace{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)}_{b}\underbrace{\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}\right)}_{c} = \frac{x^3}{2}+\frac{2x^4}{3}+\frac{13x^5}{24}+\dots$$

OBS: Då det är max 5, minst två a och ett c är det max 4 a och 2 b.

Koefficienten framför $\frac{x^5}{5!}$ är alltså $5!\cdot\frac{13}{24}=65$, antalet vi letade efter.

Uppgift 8

(a) Med hjälp av de angivna värden får vi (se förel. 14)

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{9}d_i^2-\frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{9}d_i\right)^2=639,\quad S_{xy}=\sum_{i=1}^{9}d_ip_i-\frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{9}p_i\right)\left(\sum_{i=1}^{9}d_i\right)=10893.78$$

samt $b_1=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=17.05$ och $b_0=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{9}p_i-\beta_1\sum_{i=1}^{9}d_i\right)=49.016$

Regressionslinjen blir då $y=b_0+b_1x=49+17\cdot x$

(b) $H_0:\beta_1=0$, $H_1:\beta_1\neq 0$, $\alpha=0.1$

$T:\ \frac{B_1-\beta_1^0}{\sqrt{s^2/S_{xx}}}$ är t-fördelat med $n-2=7$ frihetsgrader.

$$S_{yy}=\sum_{i=1}^{9}p_i^2-\frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{9}p_i\right)^2=186706.2,\quad SSE=S_{yy}-b_1S_{xy}=967.25$$

$s^2=\frac{SSE}{7}=138.18$, så att utfallet blir

$$t=\frac{b_1-0}{\sqrt{s^2/S_{xx}}}=36.7$$

Med $t_{\alpha/2}=1.895\ll t$ förkastar vi alltså nollhypotesen och kan påstå med 95% säkerhet att det finns ett linjärt samband mellan pris och distans här.