Nancy Abdallah
Chalmers tekniska högskola - Göteborgs universitet
Tentamen

Datum: 190607 kl. 14.00–18.00
Telefonvakt: Andreas Petersson
5325

MVE051/MSG810 Matematisk statistik och diskret matematik

Hjälpmedel: icke-grafiska miniräknare och en (dubbelsidig) A4 sida med egna antekningar eller Betaboken.
Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 12 poäng på tentamen.
För betyg VG för GU studenter krävs 22 poäng.
För betyg 4 resp. 5 för Chalmers studenter krävs dessutom 18 resp. 24 poäng.
Alla svar ska vara motiverade.
Det finns en engelsk och en svensk version av frågorna. Du kan skriva dina svar på bägge av dessa två språk (du kan blanda).
Uppgiferna 6 och 7 finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

Svenska

1. **Del I** Antalet taxibilar som anländer till ett hotell i en stor stad har en Poissonfördelning med parameter 30 bilar per timme.

(a) Beräkna sannolikheten att högst 3 taxibilar anländer inom 6 minuter. (1p)

(b) Vad är sannolikheten för att man måste vänta mer än 6 minuter på att ett taxibil anländer? (1p)

Del II Vi är intresserade av den slumpvariabel som ger tiden mellan taxibilar som anländer till hotellet. Ett stickprov av storlek 30 ger ett stickprovsmedelvärde $\overline{x} = 5.0$ och en stickprovsstandardavvikelse $s = 4.0$. Antag att X är approximativt normalfördelad.

(a) Beräkna ett konfidensintervall för väntevärdet μ med konfidensgrad 90%. (2p)

(b) Beräkna ett konfidensintervall för variansen σ^2 med konfidensgrad 90%. (2p)

(c) Antag att $\sigma^2 = 17$. Forskare förväntar sig att μ är större än 7.

i. Ange de noll och alternativa hypoteserna. Kan man acceptera den alternativa hypotesen med signifikansnivå 90%? (3p)

ii. Vad är den minsta signifikansnivån α som skulle göra det möjligt att förkasta nollhypotesen? (1p)

2. Ett basketbollag testar ett nytt stretching-program för att minska skadorna under ligan. Datan nedan visar X, dagliga antalet minuter av stretchövningar, och Y, antalet skador under ligan.

Minuter med stretching	0	30	10	15	5	25	35	40
Skador	4	1	2	2	3	1	0	1

Använd följande summor för att svara på frågorna nedan

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 160 \quad \sum_{i=1}^{8} y_i = 14 \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 4700 \quad \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 36 \quad \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 160$$

(a) Beräkna den uppskattade regressionslinjen $\hat{\mu}_{Y|X} = b_0 + b_1 x$ för antalet skador i termer av stretchtid. (2p)

(b) Hur många minuter av stretching behövs för att vara skadefri? (1p)

3. Använd genererande funktioner för att hitta en explicit formel till a_n där

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_n &= 3a_{n-1} + (-1)^n \quad \text{för } n \geq 1 \end{cases}$$

(5p)

4. Ett byggföretag anställer tre försäljningsingenjörer. Ingenjörer 1, 2, och 3 uppskattar kostnaden för 30%, 20%, och 50%, respektive, av alla företagets projekt. För $i = 1, 2, 3$, låt E_i vara händelsen att projektets kostnad uppskattas av ingenjör i. Följande är de betingade sannolikheterna att en vald ingenjör gör ett fel vid uppskattning av kostnader: (3p)

$$P(\text{fel}|E_1) = 0.01,\ P(\text{fel}|E_2) = 0.03 \text{ and } P(\text{fel}|E_3) = 0.02$$

Om ett projekt resulterar i ett fel, vad är sannolikheten att felet görs av ingenjör 1?

5. Den momentgenererande funktionen av en slumpvariabel X som har en gammafördelning med parametrar α, β ges av

$$m_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$$

(a) Använd $m_X(t)$ för att beräkna väntevärdet och variansen av X. (2p)

(b) Den momentgenererande funktionen av en slumpvariabel Y som har en exponentialfördelning med parameter β är

$$m_Y(t) = (1 - \beta t)^{-1}$$

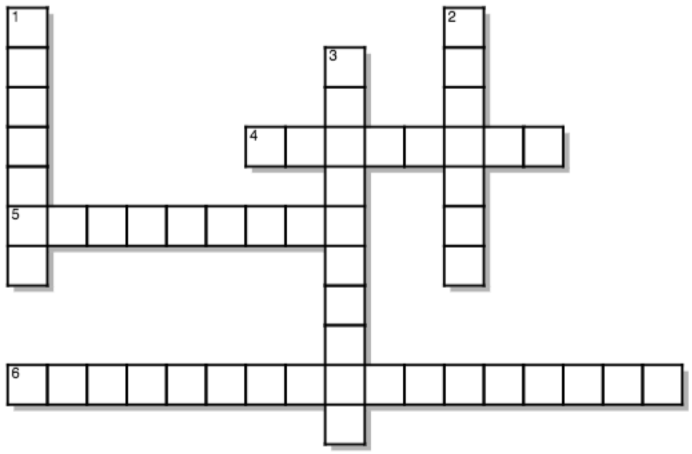
Låt Y_1 och Y_2 vara två oberoende slumpvariabler som följer en exponentialfördelning med parameter β.

i. Ange den momentgenererande funktion för $X = Y_1 + Y_2$. (1p)

ii. Vad är fördelning av X? Ge parametrar och beräkna $E[X]$. (2p)

I uppgift 6 och 7 behöver du inte motivera ditt svar. Skriv svaren på bladet och lämna det in tillsammans med övriga lösningar.

6. Följande korsord består av sex ord uppräknade 1 till 6. Ledtrådarna ges nedan. Lös korsordet eller skriv svaret vid varje fråga. *(Svaren ges på obestämd form)* (1.5p)



1. En fördelning med täthetsfunktion $f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ för $x = 0, 1, 2, \cdots$ och $\lambda > 0$ konstant, kallas för ....
2. $s^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$ är en uppskattning för ....
3. $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ är en uppskattning till ....
4. En fördelning med täthetsfunktion $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ där n är ett positivt heltal och p är ett reelt tal mellan 0 och 1, kallas för ...
5. Två händelser A och B så att $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ kallas för ....
6. En uppskattning $\hat{\theta}$ till en parameter θ så att $E[\hat{\theta}] = \theta$ kallas för ....

7. **Flervalfrågor.** Välj det rätta svaret. (2.5p)

(a) Antalet produkter tillverkad i en fabrik på en given dag är 3500 och sannolikheten att en visst produkt är defekt är 0.55. Väntevärdet av denna binomialfördelning är

☐ 1925 ☐ 6364 ☐ 63.64 ☐ 3500

(b) Enligt Tjebysjovs olikhet: om X är en slumpvariabel med väntevärde 0 och varians 2, så gäller att $P(|X| \geq 2)$ är mindre eller lika med

☐ 0.5 ☐ 0.4 ☐ 0.04 ☐ 0.05

(c) Om ett kort väljs från en kortlek, vad är då sannolikheten att få ett ruter $\diamondsuit$ eller ett klöver $\clubsuit$?
(En kortlek har 52 kort varav 13 hjärter, 13 ruter, 13 spader och 13 klöver)

☐ 1/2 ☐ 13/52 ☐ 1/4 ☐ 3/4

(d) En basketbollspelare träffar 80 procent av sina frikast under säsongen. Vad är sannolikheten att han träffar exakt 6 av sina nästa 8 frikast?

☐ 0.1468 ☐ 0.3355 ☐ 0.1678 ☐ 0.2936

(e) En basketbollspelare träffar 80 procent av sina frikast under säsongen. Vad är sannolikheten att han kommer att träffa för första gången vid hans tredje försök?

☐ 0.128 ☐ 0.032 ☐ 0.0064 ☐ 0.1024

English version

1. **Part A** The number of taxis that arrive to a downtown hotel in a big city follows a Poisson distribution at the rate of 30 cars per hour.

   (a) Find the probability that at most 3 taxis arrive in 6 minutes. (1p)
   $\lambda = 3$ cars per 6 minutes.
   $P(X \leq 3) = 0.6472$ using the table.

   (b) What is the probability that one should wait for more than 6 minutes for the first taxi to arrive? (1p)
   Exponential distribution with $\lambda = 0.5$ car per minute.
   $P(Y > 6) = \int_6^\infty 0.5e^{-0.5x}dx = -e^{-0.5x}|_6^\infty = e^{-3}$.

   Part B We are interested now in the random variable X giving the time between arrivals of taxis. We collect a data set of size 30 with sample mean $\overline{x} = 5.0$ and sample standard deviation $s = 4.0$. Assume that X is approximately normally distributed.

   (a) Find a 90% confidence interval for the mean μ of X. (2p)
   Since σ is unknown we consider the t distribution with 29 degrees of freedom. The confidence interval is $(\overline{x} \pm t_{(0.95)} s/\sqrt{n})$.
   Using the table we find $t_{0.95} = 1.699$. Therefore the confidence interval is

   $$(5 \pm 1.699 * 4/\sqrt{30}) = (3.76, 6.24)$$

   (b) Find a 90% confidence interval for the variance σ^2. (2p)
   A 90% confidence interval on σ^2 is given by

   $$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.95}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.05}}\right) = \left(\frac{29(16)}{42.6}, \frac{29(16)}{17.7}\right) = (10.89, 26.2)$$

   (c) Suppose now that $\sigma^2 = 17$. Researchers expect that the true mean of X is less than 5.5.

      i. State the null and alternative (research) hypotheses. Could we accept the research hypothesis with a 90% level of significance? (3p)
      $H_0 : \mu = 5.5$ and $H_1 : \mu < 5.5$. We have a left tailed test. Since X is normally distributed, $\overline{X}$ follows a normal distribution with mean μ and variance $\sigma^2/\sqrt{n}$. Since σ^2 is known, we use the z-test. Test statistic: $z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5-5.5}{\sqrt{17/30}} = -0.664$
      The critical point is $z_{0.1} = -1.28 < -0.664$, therefore we do not reject the null hypothesis.

      ii. What is the smallest value of the level of significance α for which we reject the null hypothesis? (1p)
      It is the p- value. $p = p(z < -0.664) \simeq 0.25$ The smallest value of α for which we reject the null hypothesis is 25%.

2. A basketball team is testing a new stretching program to reduce the injuries during the league. The data below show X, the daily number of minutes doing stretching exercises, and Y, the number of injuries along the league.

Stretching minutes	0	30	10	15	5	25	35	40
Injuries	4	1	2	2	3	1	0	1

Use the following sums to answer the questions below

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 160 \quad \sum_{i=1}^{8} y_i = 14 \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 4700 \quad \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 36 \quad \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 160$$

(a) Find the regression line $\hat{\mu}_{Y|X} = b_0 + b_1 x$ of the number of injuries in terms of stretching time. (2p)

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ &= \frac{8(160) - 160(14)}{8(4700) - (160)^2} \\ &= -0.08 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= \overline{y} - b_1\overline{x} \\ &= \frac{14}{8} + 0.08\frac{160}{8} \\ &= 3.35 \end{aligned}$$

Hence, the regression line is given by

$$\hat{\mu}_{Y|X} = 3.35 - 0.08x$$

(b) How many minutes of stretching are required for having no injuries? (1p)
$\hat{y} = 0 = 3.35 - 0.08x$. Therefore $x = \frac{3.35}{0.08} \approxeq 42$ minutes.

3. Use generating functions to find an explicit form for a_n where a_n is defined as follows

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_n &= 3a_{n-1} + (-1)^n \quad \text{for } n \geq 1 \end{cases}$$

(5p)

Let $g(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} a_n x^n &= \sum_{n\geq 1}(3a_{n-1}x^n + (-1)^n x^n) \\ &= 3\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 1}(-1)^n x^n \\ \sum_{n\geq 0} a_n x^n - a_0 &= 3x\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \frac{-x}{1+x} \\ g(x) - 1 &= 3xg(x) - \frac{x}{1+x} \\ (1-3x)g(x) &= 1 - \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(1+x)(1-3x)} \\ &= \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-3x} \end{aligned}$$

$A = \frac{1}{1-3x}|_{x=-1} = \frac{1}{4}$ and $B = \frac{1}{1+x}|_{x=1/3} = \frac{3}{4}$. Hence,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1/4}{1+x} + \frac{3/4}{1-3x} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n + \frac{3}{4}\sum_{n\geq 0} 3^n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(\frac{(-1)^n}{4} + \frac{3^{n+1}}{4})x^n \end{aligned}$$

Therefore $a_n = \frac{(-1)^n}{4} + \frac{3^{n+1}}{4}$.

4. A construction company employs three sales engineers. Engineers 1, 2, and 3 estimate the costs of 30%, 20%, and 50%, respectively, of all the company's projects. For $i = 1, 2, 3$, define E_i to be the event that a job is estimated by engineer i. The following probabilities describe the rates at which the engineers make serious errors in estimating costs:

$$P(\text{error}|E_1) = 0.01,\ P(\text{error}|E_2) = 0.03 \text{ and } P(\text{error}|E_3) = 0.02$$

If a particular bid results in a serious error in estimating job cost, what is the probability that the error was made by engineer 1? (3p)

$p(E_1) = 0.3,\ p(E_2) = 0.3$ and $p(E_3) = 0.5$.

By Bayes' theorem,

$$\begin{aligned} p(E_1|fel) &= \frac{p(fel|E_1)p(E_1)}{p(fel|E_1)p(E_1) + p(fel|E_2)p(E_2) + p(fel|E_3)p(E_3)} \\ &= 0.158 \end{aligned}$$

5. The moment generating function of a random variable X following a gamma distribution with parameters α, β is given by

$$m_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$$

(a) Use $m_X(t)$ to find the expected value and the variance of X in terms of α and β. (2p)

$m'_X(t) = -\alpha(1-\beta t)^{-\alpha-1}(-\beta) = \alpha\beta(1-\beta t)^{-\alpha-1}$

$E[X] = m'_X(0) = \alpha\beta$.

$m''_X(t) = \alpha\beta(-\alpha-1)(1-\beta t)^{-\alpha-2}(-\beta) = \alpha\beta^2(\alpha+1)(1-\beta t)^{-\alpha-2}$

$m''_X(0) = \alpha\beta^2(\alpha+1) = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2$.

Therefore, $V[X] = m''_X(0) - (m'_X(0))^2 = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$

(b) The moment generating function of a random variable Y that follows an exponential distribution with parameter β is

$$m_Y(t) = (1-\beta t)^{-1}$$

Let Y_1 and Y_2 be two independent random variable following an exponential distribution with parameter $\beta = 3$.

i. Find the moment generating function of $X = Y_1 + Y_2$. (1p)

Since Y_1 and Y_2 are independent, then $m_X(t) = m_{Y_1}(t) \cdot m_{Y_2}(t) = (1 - 3t)^{-2}$

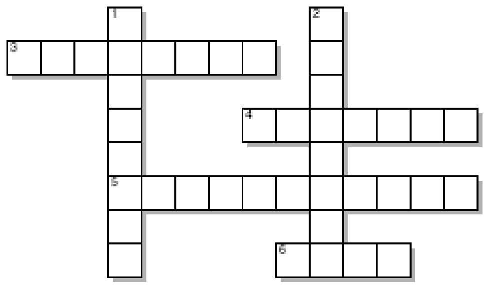
ii. What is the distribution of X? Find $E[X]$. (2p)

X follows a gamma distribution with parameters $\alpha = 2$ and $\beta = 3$.

$E[X] = \alpha\beta = 6$

In exercises 6 and 7 you do not need to motivate your answers. Write your answer on the exam sheet and turn it in with the rest of your solutions.

6. The following crossword consists of sex words enumerated from 1 to 6 and whose clues are given below. Solve the crosswords or write your answer next to each clue. (1.5p)



1. A distribution whose density function is $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ for a fixed positive integer n and a real number $0 < p < 1$.
   Binomial
2. $s^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$ is an estimate for the ....
   variance (varians in swedish)
3. An estimator $\hat{\theta}$ for a parameter θ such that $E[\hat{\theta}] = \theta$ is said to be $\cdots$.
   unbiased (väntevärdesriktig in swedish)
4. A distribution whose density function is $f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ for $x = 0, 1, 2, \cdots$ and $\lambda > 0$ constant.
   Poisson
5. Two events A and B such that $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ are said to be $\cdots$.
   independent (oberoende)
6. $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ is an estimate for the $\cdots$.
   mean (väntevärde)

7. **Multiple choice questions.** Choose the correct answer for each of the following questions. (2.5p)

(a) The number of products manufactured in a factory in a day is 3500 and the probability that a product is defected is 0.55 then the mean of binomial probability distribution is

☐ 1925 ☐ 6364 ☐ 63.64 ☐ 3500

(b) According to Chebyshev's inequality, if X is a random variable of mean 0 and variance 2, then $P(|X| \geq 2)$ is less than or equal than

☐ 0.5 ☐ 0.4 ☐ 0.04 ☐ 0.05

(c) If a card is chosen from a standard deck of cards, what is the probability of getting a diamond $\diamondsuit$ or a club $\clubsuit$?
(A standard deck of cards has 52 cards of which 13 "Heart", 13 "Diamond", 13 "Spade" and 13 "club")

☐ 1/2 ☐ 13/52 ☐ 1/4 ☐ 3/4

(d) A basketball player makes 80 percent of his free throws during the season. What is the probability that he will make exactly 6 of his next 8 free throws?

☐ 0.1468 ☐ 0.3355 ☐ 0.1678 ☐ 0.2936

(e) A basketball player makes 80 percent of his free throws during the season. What is the probability that he will make it for the first time at the third try?

☐ 0.128 ☐ 0.032 ☐ 0.0064 ☐ 0.1024

Tables

Cumulative Poisson distribution

$\lambda=$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.5	5.0	5.5
$x=$ 0	0.1353	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608	0.0498	0.0408	0.0334	0.0273	0.0224	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041
1	0.4060	0.3546	0.3084	0.2674	0.2311	0.1991	0.1712	0.1468	0.1257	0.1074	0.0916	0.0611	0.0404	0.0266
2	0.6767	0.6227	0.5697	0.5184	0.4695	0.4232	0.3799	0.3397	0.3027	0.2689	0.2381	0.1736	0.1247	0.0884
3	0.8571	0.8194	0.7787	0.7360	0.6919	0.6472	0.6025	0.5584	0.5152	0.4735	0.4335	0.3423	0.2650	0.2017
4	0.9473	0.9275	0.9041	0.8774	0.8477	0.8153	0.7806	0.7442	0.7064	0.6678	0.6288	0.5321	0.4405	0.3575
5	0.9834	0.9751	0.9643	0.9510	0.9349	0.9161	0.8946	0.8705	0.8441	0.8156	0.7851	0.7029	0.6160	0.5289
6	0.9955	0.9925	0.9884	0.9828	0.9756	0.9665	0.9554	0.9421	0.9267	0.9091	0.8893	0.8311	0.7622	0.6860
7	0.9989	0.9980	0.9967	0.9947	0.9919	0.9881	0.9832	0.9769	0.9692	0.9599	0.9489	0.9134	0.8666	0.8095
8	0.9998	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9943	0.9917	0.9883	0.9840	0.9786	0.9597	0.9319	0.8944
9	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973	0.9960	0.9942	0.9919	0.9829	0.9682	0.9462
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9972	0.9933	0.9863	0.9747
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9991	0.9976	0.9945	0.9890
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9992	0.9980	0.9955
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9983
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

χ^2 distribution

d.f.	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.995}$
25	10.520	13.120	14.611	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	13.844	15.379	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	14.573	16.151	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	15.308	16.928	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	16.047	17.708	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	16.791	18.493	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
35	17.192	20.569	22.465	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
40	20.707	24.433	26.509	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
45	24.311	28.366	30.612	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166

T-distribution

d.f.	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
25	1.316	1.7081	2.0595	2.485	2.7874
26	1.315	1.7056	2.0555	2.479	2.7787
27	1.314	1.7033	2.0518	2.473	2.7707
28	1.313	1.7011	2.0484	2.467	2.7633
29	1.311	1.6991	2.0452	2.462	2.7564
30	1.310	1.6973	2.0423	2.457	2.7500
35	1.3062	1.6896	2.0301	2.438	2.7239
40	1.3031	1.6839	2.0211	2.423	2.7045

Anmärkning: I T- och χ^2-tabeller är **d.f.** frihetsgrader (degrees of freedom).
χ^2_p betyder att $p(\chi^2 \leq \chi^2_p) = p$ och t_p betyder att $p(t \leq t_p) = p$ (arean till vänster).
Till exempel, $p(\chi^2_{27} \leq 11.808) = 0.005$ (d.f.=27) och $p(t_{25} \leq 1.316) = 0.9$ (d.f.=25).

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414