Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik D2 (MVE055/MSG810).
Den 24 augusti 2010.

1. Lösning:

   a) $2X+Y$ är normalfördelad med väntevärde $\mathbf{E}[2X+Y] = 2\mathbf{E}[X]+\mathbf{E}[Y] = -3$ och varians $\mathbf{Var}[2X+Y] = 4\,\mathbf{Var}\,X + \mathbf{Var}\,Y = 4\cdot 1 + 3^2 = 13$. Dvs, $2X+Y \sim \text{Norm}(-3, \sqrt{13})$.
   b) $\mathbf{P}(5X > 10) = \mathbf{P}(X > 2) = \mathbf{P}(X-2 > 0) = 50\%$, ty $X-2$ är standardnormalfördelad.

2. Lösning:

   a) $X \sim \text{Geom}(1/6)$ ger $\mathbf{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbf{P}(X=1) - \mathbf{P}(X=2) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\frac{5}{6} = \frac{25}{36} \approx 69.4\%$
   b) $X \sim \text{Bin}(20, 0.2)$ ger (enligt tabell) $\mathbf{P}(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.2061 \approx 79.4\%$
   c) $X \sim \chi^2(2)$, dvs X är χ^2-fördelad med $r=2$ frihetsgrader, ger
   $f_X(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-x/2} = \frac{1}{2}e^{-x/2}$ och därmed
   $\mathbf{P}(X \geq 3) = \int_3^\infty \frac{1}{2}e^{-x/2}dx = \left[-e^{-x/2}\right]_3^\infty = e^{-3/2} \approx 0.2231 \approx 22.3\%$

3. Lösning:
   Låt oss dra ett slumpmässigt epostmeddelande och inför händelserna
   $S = \{$epostmeddelandet är skräppost$\}$ och
   $L = \{$epostmeddelandet innehåller ordet "lottery"$\}$.
   Då är $\mathbf{P}(S) = 40\%$, $\mathbf{P}(L|S) = 25\%$ och $\mathbf{P}(L) = 15\%$.

   a) Bayes sats ger $\mathbf{P}(S|L) = \frac{\mathbf{P}(L|S)\mathbf{P}(S)}{\mathbf{P}(L)} = \frac{2}{3} \approx 66.7\%$
   b) Totala sannolikhetslagen ger $\mathbf{P}(L) = \mathbf{P}(S)\mathbf{P}(L|S) + \mathbf{P}(S^C)\mathbf{P}(L|S^C)$, varav
   $\mathbf{P}(L|S^C) = \frac{\mathbf{P}(L) - \mathbf{P}(S)\mathbf{P}(L|S)}{\mathbf{P}(S^C)} = \frac{0.15 - 0.4\cdot 0.25}{0.6} = \frac{1}{12} \approx 8.3\%$.

4. Lösning:

   a) Låt p vara andelen icke oavgjorda matcher som vinns av hemmalaget. $\hat{p} = \frac{83}{150} \approx 0.5533$ är då en väntevärdesriktig skattnign av p och konfidensintervallet för p ges av

   $$\hat{p} \pm z_{0.005}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{150}} \approx 0.5533 \pm 2.58 \cdot 0.0406 \approx 0.5533 \pm 0.1047 \approx 55.3\% \pm 10.5\%$$

   b) Ingen alls. Både $p > 0.5$ och $p \leq 0.5$ är förenliga med konfidensintervallet.

5. Lösning:

   a) Låt X_i beteckna antalet skyltar hon måste läsa av för att se en med sifferdel i då hon börjat leta efter detta nummer. Då är $X_i \sim \text{Geom}(1/999)$ och $\mathbf{E}[X_i] = 999$. Det totala antalet skyltar hon måste se blir därför

   $$\mathbf{E}[X_1 + \cdots + X_{999}] = \mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_{999}] = 999^2 = 998001$$

   b) För $i = 2, \ldots, 999$, låt A_i vara sannolikheten att hon ser en skylt med nummer i direkt efter att hon bockat av nummer $i-1$. Då är den sökta sannolikheten

   $$\mathbf{P}(A_2 \cup \cdots \cup A_{999}) = 1 - \mathbf{P}(A_2^C \cap \cdots \cap A_{999}^C) = 1 - \mathbf{P}(A_2^C) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{999}^C) = 1 - \left(\frac{998}{999}\right)^{998} \approx 0.63194 \approx 63.2\%$$

6. Lösning:

   a) Låt X vara antalet räknade fotoner. Då är $X \sim \text{Poi}(3.0)$ och sannolikheten för felaktig mottagning blir (enligt tabell):

   $$\mathbf{P}(X \geq 7) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 6) \approx 1 - 0.9665 = 3.35\%$$

b) Inför händelserna $N = \{\text{Nolla sändes}\}$ och $S = \{\text{Antalet räknade fotoner var exakt } 6\}$. Då är $\mathbf{P}(N) = \mathbf{P}(N^C) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(S|N) = \frac{e^{-3.0}3.0^6}{6!} \approx 0.0504$ och $\mathbf{P}(S|N^C) = \frac{e^{-10.0}10.0^6}{6!} \approx 0.0631$. Bayes sats ger därför

$$\mathbf{P}(N|S) = \frac{P(N)\mathbf{P}(S|N)}{P(N)\mathbf{P}(S|N) + P(N^C)\mathbf{P}(S|N^C)} \approx 44.4\%$$

7. Lösning:
Datan kan sammanfattas med stickprovsmedelvärdet $\bar{x} = 6.2578 \cdot 10^5$ och stickprovsstandardavvikelsen $s = 1.3894 \cdot 10^5$. Konfidensintervallet för väntevärdet blir

$$\bar{x} \pm t_{0.025}\frac{s}{\sqrt{9}} \approx 6.2578 \cdot 10^5 \pm 2.306\frac{1.3894 \cdot 10^5}{3} \approx 6.258 \cdot 10^5 \pm 1.068 \cdot 10^5$$

Konfidensintervallet för variansen ges av

$$\left[\frac{8s^2}{\chi^2_{0.025}}, \frac{8s^2}{\chi^2_{0.975}}\right] = \left[\frac{8s^2}{17.53}, \frac{8s^2}{2.180}\right] \approx [8.809 \cdot 10^9, 7.084 \cdot 10^{10}]$$

varav konfidensintervallet för standardavvikelsen blir

$$[2.66 \cdot 10^5, 0.94 \cdot 10^5]$$

8. Lösning:

$$m_X(t) = \mathbf{E}[e^{tX}] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} e^{2tk} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{(2t-\ln 2)k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{(2t-\ln 2)}\right)^k$$

Denna geometriska summa konvergerar precis då $t < \frac{\ln 2}{2}$ och vi får

$$m_X(t) = \frac{e^{(2t-\ln 2)}}{1 - e^{(2t-\ln 2)}}, \quad t < \frac{\ln 2}{2}$$

9. Lösning:
Vi ska välja a så att $\mathbf{E}\left[a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2\right] = p$. Men

$$\mathbf{E}\left[a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2\right] = a\mathbf{E}Y_1^2 = a\int_0^{\sqrt{p}} \frac{2y^3}{p}dy = a\left[\frac{y^4}{2p}\right]_0^{\sqrt{p}} = a\frac{p}{2}$$

Skattaren blir alltså väntevärdesriktig om vi väljer $a = 2$.