TENTAMEN: Matematisk statistik och diskret matematik D (MVE055/MSG810)
Tid och plats: Onsdagen den 13 januari 2010, kl. 14.00–18.00, VV-salar.
Jour: Marcus Isaksson, tel 0708-527663. Besöker tentamenssalen ca kl 15.30, 17.00.
Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta.
Betygsgränser: 3: 12 poäng, 4: 18 poäng, 5: 24 poäng. Maximalt antal poäng är 30.

1. (3p) Låt X och Y vara två stokastiska variabler som enbart kan anta värdena 0 eller 1. Anta att $\mathbf{P}(X=1)=0.8$, $\mathbf{P}(Y=1)=0.4$ och $\mathbf{P}(X=1,Y=1)=0.3$ och beräkna:
   a) $\mathbf{Var}\,X$
   b) $\mathbf{Cov}(X,Y)$
   c) $\mathbf{P}(Y=1 \mid X=0)$

2. (3p) Inför julen har Beata köpt 5 böcker som hon har tänkt ge bort. 2 av dessa är den senaste deckaren av författaren A medan de övriga 3 är den nya självbiografin av författaren B. Efter att ha slagit in böckerna i presentpapper har hon dock råkat blanda ihop böckerna och är nu tvungen att öppna några av paketen för att kunna identifiera vilka som är vilka. (*Båda författarnas böcker har samma format och ungefär lika många sidor så det går inte att avgöra vilka som är vilka utan att ta bort presentpappret.*)
   a) Om de första 2 hon öppnar är av författaren A så behöver hon förstås inte öppna de övriga 3. Vad är sannolikheten för detta?
   b) Låt X vara antalet paket hon måste öppna innan hon med säkerhet vet vad som finns i de övriga paketen. Vad är väntevärdet av X?

3. (4p) Medeltemperaturen i januari månad i Göteborg kan antas vara normalfördelad med väntevärde -2.0 ℃ och standardavvikelse 4.0 ℃, samt oberoende av tidigare års medeltemperaturer i januari. Låt oss anta att klimatet är konstant så att dessa parametrar inte förändras från år till år. Vad är då
   a) Sannolikheten att medeltemperaturen i januari ett givet år understiger -10.0 ℃?
   b) Sannolikheten att medeltemperaturen i januari understiger -10.0 ℃ någon gång under 2000-talet (seklet fr.o.m. år 2000 och t.o.m. år 2099) ?

4. (3p) Bestäm väntevärde och standardavvikelse för följande stokastiska variabler:
   a) Tid till nästa telefonsamtal till en växel om inkommande samtal antas beskrivas av en Poisson-process med intensiteten 3 samtal per minut.
   b) Antal myntsinglingar (med ett idealt mynt) tills klave fås.
   c) Antal rätt svar på tretton 1X2-frågor om du svarar slumpmässigt (dvs 1,X eller 2 med lika stor sannolikhet på varje fråga och oberoende av övriga frågor).
   En 1X2-fråga har 3 svarsalternativ 1,X och 2 varav precis ett är rätt.

5. (4p) Hugo påstår sig kunna känna av om en mobiltelefon i ett angränsande rum är påslagen eller avslagen genom de elektriska fält som den alstrar. För att testa detta singlar du slant 30 gånger och för varje gång slår du på telefonen om du fick klave och slår av den om du fick krona och frågar därefter Hugo om han tror att den är på eller av. Låt X vara antal gånger (av de 30) som Hugo svarar rätt.
   a) Ange ett 90%-igt konfidensintervall för p, sannolikheten att Hugo svarar rätt om han tillfrågas endast en gång om en slumpmässigt på/av-slagen telefon, och beräkna detta om $X=25$.
   b) Vad är det minsta värdet på X som gör att du med 90% konfidens kan dra slutsatsen att Hugo är bättre än slumpen, dvs att $p>0.5$?

6. (3p) Låt Z vara likformigt fördelad på intervallet $[1,3]$. Ange den momentgenererande funktionen $m_Z(t)$ för Z. Vad är $m_Z(0)$?

7. (3p) I syfte att kontrollera en maskin som fyller 2-kilograms mjölförpackningar med mjöl tar du ut ett stickprov om 8 förpackningar från en dagsproduktion om 20000 förpackningar och mäter mängden mjöl (i kg) i dessa paket till:

2.001	1.992	1.892	1.963
1.991	2.013	1.967	1.999

   Mängden mjöl i ett slumpmässigt utvalt paket från dagsproduktionen kan antas vara approximativt normalfördelad. Ange ett 99%-igt konfidensintervall för snittmängden mjöl i de 20000 paket som produceras under dagen.

8. (3p) För att minimera risken för farliga jordfel väljer en tillverkare av pumpar till trädgårdsdammar att leverera pumparna med två seriekopplade jordfelsbrytare av två olika fabrikat A respektive B. Låt a resp. b vara sannolikheten att en brytare av fabrikat A respektive fabrikat B ej fungerar och anta att huruvida en viss brytare fungerar eller ej är oberoende av alla andra brytare. Låt nu p vara sannolikheten att ingen av de två seriekopplade brytarna som levereras med en pump fungerar. I syfte att skatta p väljer du ut 1000 slumpmässiga brytare av varje fabrikat och noterar antalet X_A resp. X_B som ej fungerar av varje fabrikat. Bestäm konstanten c så att $\widehat{p} = cX_AX_B$ är en väntevärdesriktig skattare för p.

9. (4p) I ett frågesportprogram med 3 olika frågekatorier A,B och C gäller det för deltagaren att så snabbt som möjligt besvara minst en fråga ur varje kategori korrekt. Programledaren ställer en slumpmässig fråga ur en slumpmässig kategori tills detta skett. Vad är väntevärdet av antalet frågor som ställs om deltagaren vet med sig att hon har sannolikheten 0.6, 0.3, resp. 0.9 att besvara en fråga ur kategori A, B, resp. C korrekt? *Obs: Även om spelaren t.ex. har klarat kategorierna A och C så kan frågor från dessa kategorier komma upp igen (med sannolikheten 2/3 varje gång). Sannolikheten för att det räcker med endast 3 frågor är alltså* $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.9 = 3.6\%$ *eftersom de 3 frågorna måste väljas från olika kategorier (med slh.* $\frac{2}{3}\frac{1}{3}$*) och alla måste besvaras korrekt.*

Lycka till!