Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik D2 (MVE055/MSG810).
Den 19 oktober 2009.

1. Lösning:

   a) $\mathbf{P}(B^C) = 1 - \mathbf{P}(B) = 1 - 0.7 = 0.3$
   b) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \overset{\text{ober.}}{=} \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = 0.82$
   c) $\mathbf{P}(B|A) \overset{\text{ober.}}{=} \mathbf{P}(B) = 0.7$

2. Lösning:
   I varje omgång är sannolikheten att anfallaren förlorar en markör 21/36. Låt nu a resp. f beteckna att anfallaren resp. försvararen förlorar en markör och en sekvens av a och f ett utfall bestående av en serie av sådana situationer. Då blir (rita träddiagram):

$$\mathbf{P}(\text{anfallaren vinner striden}) = \mathbf{P}(\{\text{ff}, \text{aff}, \text{faf}\}) = \left(\frac{15}{36}\right)^2 + 2\frac{21}{36}\left(\frac{15}{36}\right)^2 = \frac{325}{864} \approx 0.3762 \approx 37.6\%$$

3. Lösning:

   a) $\overline{X}_A \pm t_{0.025}(9)\frac{S_A}{\sqrt{10}} \approx \overline{X}_A \pm 2.262\frac{S_A}{\sqrt{10}} \approx \overline{X}_A \pm 0.7153\, S_A$
   b) Låt μ_A resp. μ_B vara väntevärdet av effektiviteten has lamptyp A respektive lamptyp B. Då ges ett 95%-igt konfidensintervall för $\mu_A - \mu_B$ av

$$\begin{aligned}\overline{X}_A - \overline{X}_B \pm t_{0.025}(18)\sqrt{\frac{9S_A^2 + 9S_B^2}{18}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)} &\approx \overline{X}_A - \overline{X}_B \pm 2.101\sqrt{\frac{S_A^2 + S_B^2}{10}} \approx \\ &\approx \overline{X}_A - \overline{X}_B \pm 0.6644\sqrt{S_A^2 + S_B^2}\end{aligned}$$

   Alltså: Om $\overline{X}_A - \overline{X}_B - 0.6644\sqrt{S_A^2 + S_B^2} > 0$ kan man dra slutsatsen att väntevärdet av effektiviteten är högre hos lamptyp A.
   Om istället $\overline{X}_A - \overline{X}_B + 0.6644\sqrt{S_A^2 + S_B^2} < 0$ kan man dra slutsatsen att väntevärdet av effektiviteten är högre hos lamptyp B.
   c) $\overline{X}_A - \overline{X}_B + 0.6644\sqrt{S_A^2 + S_B^2} \approx -2.7 + 2.3565 < 0$ så med 95% konfidens kan man dra slutsatsen att väntevärdet av effektiviteten är högre hos lamptyp B än hos lamptyp A.

4. Lösning:

   a) $\mathbf{Var}[3Y - 1] = 9\,\mathbf{Var}[Y] + \mathbf{Var}[-1] = 9\,\mathbf{Var}[Y] = 9\frac{1}{2^2} = \frac{9}{4}$
   b) Y har den momentgenererande funktionen $m_Y(t) = \frac{2}{2-t}$. Derivering ger $m_Y'(t) = \frac{2}{(2-t)^2}$, $m_Y''(t) = \frac{4}{(2-t)^3}$, $m_Y^{(3)}(t) = \frac{12}{(2-t)^4}$. Detta ger $\mathbf{E}[Y^3] = m_Y^{(3)}(0) = \frac{12}{2^4} = \frac{3}{4}$.

5. Lösning:
   Om $p = 0.047$ så är $X \sim \text{Bin}(10000, 0.047)$. Centrala gränsvärdessatsen ger att X är approximativt $\text{Norm}(470, 21.164)$ och vi får

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\hat{p} \geq 0.044021) &= \mathbf{P}(X \geq 440.21) = \mathbf{P}\left(\frac{X - 470}{21.164} \geq \frac{440.21 - 470}{21.164}\right) \approx \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{440.21 - 470}{21.164}\right) \approx 1 - \Phi(-1.4076) = \Phi(1.4076) \approx 0.9204 \approx 92\%\end{aligned}$$

6. Lösning:

a) Derivering ger

$$f_X(x) = \frac{2}{x^3} \,,\; 1 \le x < \infty$$

b)

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_1^{\infty} x \frac{2}{x^3} dx = \int_1^{\infty} \frac{2}{x^2} dx = \left[-\frac{2}{x} \right]_1^{\infty} = -0 + \frac{2}{1} = 2$$

7. Lösning:

   a) Låt X vara antalet krascher under arbetsdagen. Då är $X \sim \text{Poi}(3)$ och $\mathbf{P}(X \ge 5) = 1 - \sum_{x=0}^{4} f_X(x) = 1 - e^{-3} \sum_{x=0}^{4} \frac{3^x}{x!} \approx 0.18474 \approx 18.5\%$

   b) Låt Y vara antalet ytterligare dagar han kommer använda datorn. Då är $Y \sim \text{Geom}(0.18474)$ och $\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{0.18474} \approx 5.413 \approx 5.4$

8. Lösning:

   a) Sannolikhetsvektorn $u = [\; 2/9 \quad 1/9 \quad 2/9 \quad 4/9 \;]$ beskriver fördelningen hos X_0. Motsvarande vektor för X_1 och X_2 blir uP resp. uP^2. Men en beräkning ger att $uP = u$, så X_1 och X_2 har samma fördelning som X_0.

   b) Bayes sats ger

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_0 = i | X_1 = 4) &= \frac{\mathbf{P}(X_1 = 4 | X_0 = i)\, \mathbf{P}(X_0 = i)}{\mathbf{P}(X_1 = 4)} = \frac{\mathbf{P}(X_1 = 4 | X_0 = i)\, \mathbf{P}(X_0 = i)}{4/9} = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{om } i = 1 \\ 1/4 & \text{om } i = 2 \\ 1/4 & \text{om } i = 3 \\ 1/2 & \text{om } i = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

9. Lösning:
   Chebyshev's olikhet ger $\mathbf{P}(|X - \mu| \ge 6\sigma) \le \frac{\mathbf{Var}\, X}{(6\sigma)^2} = \frac{1}{36}$ Alltså är

$$\mathbf{P}(\mu - 6\sigma < X < \mu + 6\sigma) = \mathbf{P}(|X - \mu| < 6\sigma) = 1 - \mathbf{P}(|X - \mu| \ge 6\sigma) \ge 1 - \frac{1}{36} \ge 97\%$$