**Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik D2 (MVE055/MSG810).**
**Den 25 augusti 2009.**

1. Lösning:

   a) $\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 0.3) = 1 - 0.3 = 0.7.$
   b) $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(0.3 \leq X < 0.5) = 0.2$
   c) T.ex. $C = \{0.25 \leq X \leq 0.75\}$.

2. Lösning:

   a) $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y + Z] = \mathbf{E}[Y] + \mathbf{E}[Z] = 100 \cdot 0.5 + 30 \cdot 0.4 = 62$
   b) $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[(Z-3)^2] = \mathbf{E}[(Z - \mathbf{E}[Z])^2] = \mathbf{Var}\, Z = 7$
   c) Då $f_X$ är symmetrisk kring 5 är $\mathbf{E}[X] = 5$.

3. Lösning:

   a) Sannolikheten att en pixel är defekt är $p = \frac{0.5}{1024 \cdot 600} = \frac{1}{1228800}$. Låt $X$ vara antalet defekta pixlar på en skärm. Då är $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ där $n = 1024 \cdot 600 = 614400$. Sannolikheten för att en skärm har minst 3 defekta pixlar blir:

   $$\mathbf{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} f_X(x) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx 0.014388 \approx 1.4\%$$

   b) Anta nu att $p$ (sannolikheten att en pixel är defekt) är okänd och låt $X$ vara antalet observerade defekta pixlar på de 10 skärmarna. Då är $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ där $n = 10 \cdot 1024 \cdot 600 = 6144000$. Vi får skattningen $\hat{p} = 7/6144000 \approx 1.1393 \cdot 10^{-6}$ och det (approximativa) konfidensintervallet

   $$\hat{p} \pm z_{0.005} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \approx 1.14 \cdot 10^{-6} \pm 1.11 \cdot 10^{-6}$$

   där vi använt $z_{0.005} \approx 2.58$. Det förväntade antalet defekta pixlar per skärm blir därför med 99% konfidens:

   $$1024 \cdot 600 \cdot p \approx 0.7 \pm 0.682$$

4. Lösning:
   Inför händelserna $F = \{\text{fusktärningen valdes}\}$ och $T = \{\text{tre av kasten blir sexor}\}$. Då är

   $$\mathbf{P}(F) = \frac{1}{2}$$
   $$\mathbf{P}(T|F) = \binom{10}{3} 0.25^3 \cdot 0.75^7 \approx 0.25028$$
   $$\mathbf{P}(T|F^C) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0.15505$$

   Totala sannolikhetslagen ger $\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(T|F)\mathbf{P}(F) + \mathbf{P}(T|F^C)\mathbf{P}(F^C)$.
   Det som söks är

   $$\mathbf{P}(F|T) = \frac{\mathbf{P}(T|F)\mathbf{P}(F)}{\mathbf{P}(T)} = \frac{0.25028 \cdot 0.5}{0.25028 \cdot 0.5 + 0.15505 \cdot 0.5} \approx 0.61749 \approx 61.7\%$$

5. Lösning:
Inför tillstånden $0, 7, 72, 727, 1$ där tillstånd 1 står för att dörren har öppnats, tillstånd 727 för att vi just knappat in 727, tillstånd 72 för att vi just knappat in 72, tillstånd 7 för att vi just knappat in 7 men inte 727 och tillstånd 0 för att inget av ovanstående gäller.

Vi har då en Markovkedja med 1 som absorberande tillstånd. Låt
$m_i = \mathbf{E}[\text{antal steg tills tillstånd 4 nås om vi börjar i tillstånd } i]$. Då är

$$\begin{cases} m_1 = 0 \\ m_{727} = 1 + \frac{1}{10}m_1 + \frac{1}{10}m_7 + \frac{8}{10}m_0 \\ m_{72} = 1 + \frac{1}{10}m_{727} + \frac{9}{10}m_0 \\ m_7 = 1 + \frac{1}{10}m_{72} + \frac{1}{10}m_7 + \frac{8}{10}m_0 \\ m_0 = 1 + \frac{1}{10}m_7 + \frac{9}{10}m_0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} -0.8 & -0.1 & 0 & 1 \\ -0.9 & 0 & 1 & -0.1 \\ -0.8 & 0.9 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_7 \\ m_{72} \\ m_{727} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow m_0 = 10100$$

6. Lösning:

a) Genom centrala gränsvärdessatsen kan vi anta att stickprovsmedelvärdet är normalfördelat. Konfidensintervallet för dess väntevärde $\mu$ ges därför av:

$$\bar{x} \pm t_{0.05}\frac{s}{\sqrt{100}} = 87.2 \pm 1.660\frac{7.8}{10} \approx 87.2 \pm 1.3 = [85.9, 88.5]$$

b) Antalet tomater är $N = \frac{1.2\cdot 10^6}{\mu}$. Enligt 6a) har vi med 90% konfidens att $85.9 \leq \mu \leq 88.5$. Men,

$$85.9 \leq \mu \leq 88.5 \Rightarrow 85.9 \leq \frac{1.2\cdot 10^6}{N} \leq 88.5 \Rightarrow \frac{1.2\cdot 10^6}{88.5} \leq N \leq \frac{1.2\cdot 10^6}{85.9} \Rightarrow 13559 \leq N \leq 13970$$

Alltså är $[13559, 13970]$ ett 90%-igt konfidensinterval för $N$.

7. Lösning:

a) Låt $Z \sim \text{Norm}(0, 0.05)$ vara mätfelet.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|Z| > 0.02) = \mathbf{P}(|Z/0.05| > 0.4) = 2\mathbf{P}(Z/0.05 < -0.4) = \\ = 2\mathbf{P}(Z < -2) = 2\Phi(-0.4) \approx 0.68916 \approx 69\% \end{aligned}$$

b) Låt $Z_1, \ldots, Z_{10} \sim \text{Norm}(0, 0.05)$ vara de oberoende mätfelen. Medelvärdet $Z = \frac{Z_1 + \ldots + Z_{10}}{10}$ är då också normalfördelat med väntevärde $\mathbf{E}[Z] = \frac{\mathbf{E}[Z_1] + \ldots + \mathbf{E}[Z_{10}]}{10} = 0$ och variansen $\mathbf{Var}\,Z = \frac{\mathbf{Var}\,Z_1 + \ldots + \mathbf{Var}\,Z_{10}}{10^2} = \frac{0.05^2}{10}$, dvs standardavvikelsen $\sigma_Z = \frac{0.05}{\sqrt{10}} \approx 0.01581$. Alltså,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|Z| > 0.02) = \mathbf{P}(|Z/0.01581| > 1.265) = 2\mathbf{P}(Z/0.05 < -1.265) = \\ = 2\mathbf{P}(Z < -2) = 2\Phi(-1.265) \approx 0.20587 \approx 20.6\% \end{aligned}$$

8. Lösning:

a) Låt $X$ resp $Y$ vara vinst per satsad kr på Arsenal resp. Colorado. Då är
$X = \begin{cases} 2.1 \text{ m.s. } 0.7 \\ -1 \text{ m.s. } 0.3 \end{cases}$ och $Y = \begin{cases} 5.2 \text{ m.s. } 0.35 \\ -1 \text{ m.s. } 0.65 \end{cases}$.
Vi får $\mathbf{E}[X] = 2.1 \cdot 0.7 - 1 \cdot 0.3 = 1.17$ och $\mathbf{E}[Y] = 5.2 \cdot 0.35 - 1 \cdot 0.65 = 1.17$
Din vinst är $aX + (100 - a)Y$ och den förväntade vinsten blir alltså
$\mathbf{E}[aX + (100 - a)Y] = 117$, vilket ej beror på $a$.

b) Varianserna blir $\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[(X - 1.17)^2] = 0.93^2 \cdot 0.7 + 2.17^2 \cdot 0.3 \approx 2.0181$ och $\mathbf{Var}[Y] = \mathbf{E}[(Y - 1.17)^2] = 4.03^2 \cdot 0.35 + 2.17^2 \cdot 0.65 \approx 8.7451$.
Variansen för din vinst blir alltså $\mathbf{Var}[aX + (100 - a)Y] =$
$a^2 \,\mathbf{Var}\, X + (100 - a)^2 \,\mathbf{Var}\, Y = a^2 2.0181 + (100 - a)^2 8.7451 = 10.763a^2 - 1749a + 87451$
vilket minimeras då derivatan m a p $a$ är 0, dvs då $21.526a - 1749 = 0$, dvs
$a \approx 81.25 \approx 81$.

9. Lösning:
Låt $X$ och $Y$ vara oberoende och Poissonfördelade med väntevärde 3 respektive 1.5. Då är $Z = X - Y$ Skellamfördelad med parametrar 3 och 1.5?

$$m_Z(t) = \mathbf{E}[e^{tZ}] = \mathbf{E}[e^{t(X-Y)}] = \mathbf{E}[e^{tX}e^{-tY}] = \mathbf{E}[e^{tX}]\mathbf{E}[e^{-tY}] = m_X(t)m_y(-t) =$$
$$= e^{3(e^t-1)}e^{1.5(e^{-t}-1)} = e^{4.5+3e^t+1.6e^{-t}}$$