Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik D2 (MVE055/MSG810).
Den 14 januari 2009.

1. Lösning:

   a) Sockarna kan radas upp på $\binom{6}{2} = 15$ olika sätt. Av dessa motsvarar 3 att de två röda används samma dag. Alltså är $\mathbf{P}(X = 3) = \frac{3}{15}$.
   b) Både $X = 0$ och $X = 2$ är omöjliga. Alltså är $\mathbf{P}(X = 1) = \frac{12}{15}$ och vi får $\mathbf{E}[X] = 1 \cdot \frac{12}{15} + 3 \cdot \frac{3}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = 1.4$

2. Lösning:

   a) $X \sim \text{Bin}(10, 0.5)$, $Y \sim \text{Geom}(0.5)$.
   b)
   $$\mathbf{P}(X \geq 7) = \sum_{x=7}^{10} \binom{10}{x} 0.5^{10} = \frac{176}{1024} \approx 17.2\%$$
   c)
   $$\mathbf{P}(X \geq 7 | Y \geq 4) = \frac{\mathbf{P}(X \geq 7, Y \geq 4)}{\mathbf{P}(Y \geq 4)} = \frac{0.5^{10}}{0.5^3} = \frac{1}{128} \approx 0.8\%$$
   Obs: Händelsen $A = \{X \geq 7\} \cap \{Y \geq 4\}$ består bara av ett utfall; $A = \{\text{TTTHHHHHHH}\}$.

3. Lösning:

   a) $f_X(x) = \sum_{y=0}^{5} f_{X,Y}(x, y) = \frac{6-x}{21}, 0 \leq x \leq 5$
   b) -1.25 är omöjligt. 0.00 kan uteslutas, eftersom X och Y *är* korrelerade. Korrelationen är uppenbart negativt, vilket utesluter positiva värden. -1.00 kan också uteslutas då de möjliga värdena inte ligger på en rät linje. Den enda återstående möjligheten ger svaret: $\rho_{X,Y} = -0.50$.

4. Lösning:

   a) Låt X vara antalet timmar tills första fenomenet inträffar efter kl 20.00. Då är $X \sim \text{Exp}(\frac{1}{12})$ och $\mathbf{P}(X \leq 4) = 1 - e^{-\frac{4}{12}} \approx 28\%$.
   b) Vi söker t sådant att
   $\mathbf{P}(X \leq t) = 0.5 \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{t}{12}} = 0.5 \Leftrightarrow -\frac{t}{12} = \log(0.5) \Leftrightarrow t = 12 \log(2) \approx 8.32$
   Svar: 8.32 timmar (8h 19 min)
   c) Inför händelserna
   A={Minst ett fenomen inträffar mellan 20.00 och 22.00},
   D={Minst ett fenomen inträffar mellan 22.00 och 24.00} och
   B={Minst ett fenomen inträffar mellan 24.00 och 02.00}. Eftersom antalet händelser i disjunkta intervall hos en poissonprocess är oberoende så är A,D och B

oberoende. Dessutom är $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(D) = 1 - e^{-2/12} \approx 0.1535$. Vi får nu

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\text{Båda observerar fenomenet}) &= \mathbf{P}(D \cup (A \cap B)) = \\ &= \mathbf{P}(D) + \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(D \cap A \cap B) = \\ &= \mathbf{P}(D) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(D)\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \\ &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A)^2 - \mathbf{P}(A)^3 \approx 17.3\%\end{aligned}$$

5. Lösning:

a) $\left[\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{0.025}(n-1)}}S, \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{0.975}(n-1)}}S\right] \approx \left[\sqrt{\frac{49}{70.22}}S, \sqrt{\frac{49}{31.56}}S\right] \approx [0.835S, 1.246S]$

b) Om intervallen ej överlappar, dvs om $0.835S > 20$ eller $1.246S < 15$, dvs om $S > 24.0$ eller $S < 12.0$.

6. Lösning:

a) $a_n = \frac{1}{n!}$ ger $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

b) Den momentgenererande funktionen är alltså $m_Y(t) = \frac{1}{1-2t}, t < \frac{1}{2}$. Derivering ger $m_Y^{(3)}(t) = \frac{48}{(1-2t)^4}$, varav $\mathbf{E}[Y^3] = \frac{m_Y^{(3)}(0)}{3!} = \frac{48}{6} = 8$.

7. Lösning:

a) Vi behövera visa att $\mathbf{E}[2X_1] = \theta$. Men,

$$\mathbf{E}[2X_1] = 2\mathbf{E}[X_1] = 2\int_0^\theta \frac{x}{\theta}dx = 2\frac{\theta}{2} = \theta$$

b) $2\bar{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_{50}}{25}$ är också väntevärdesriktig, ty $\mathbf{E}[2\bar{X}] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \ldots + \mathbf{E}[X_{50}]}{25} = \frac{50\frac{\theta}{2}}{25} = \theta$. Men variansen är mindre, ty $\mathbf{Var}[2\bar{X}] = \frac{50\,\mathbf{Var}\,X_1}{25^2} = \frac{2}{25}\mathbf{Var}\,X_1 = \frac{1}{50}\mathbf{Var}[2X_1]$

8. Lösning:
Bayes sats ger
$\mathbf{P}(X_1 = 2|X_2 = 3) = \frac{\mathbf{P}(X_2=3|X_1=2)\mathbf{P}(X_1=2)}{\mathbf{P}(X_2=3)} = \frac{\mathbf{P}(X_1=2)}{\mathbf{P}(X_2=3)} = \frac{0.5}{0.5\cdot 1.0 + 0.5\cdot 0.8} = \frac{5}{9} \approx 55.6\%$

9. Lösning:
Skattningarna $\hat{p}_{\text{sep}} = \frac{78}{200} = 0.39$ och $\hat{p}_{\text{nov}} = \frac{69}{200} = 0.345$ ger konfidensintervallet
$\hat{p}_{\text{sep}} - \hat{p}_{\text{nov}} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_{\text{sep}}(1-\hat{p}_{\text{sep}})}{n_{\text{sep}}} + \frac{\hat{p}_{\text{nov}}(1-\hat{p}_{\text{nov}})}{n_{\text{nov}}}} = 0.045 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.39\cdot 0.61}{200} + \frac{0.345\cdot 0.655}{200}} \approx$
$0.045 \pm 0.095 = 4.5\% \pm 9.5\%$