Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik D2 (MVE055/MSG810).
Den 16 januari 2008.

1. Lösning:
   Inför händelserna $M = \{\text{Vald bil är en miljöbil}\}$ och $D = \{\text{Vald bil är dieseldriven}\}$.
   Vi har $\mathrm{P}(M) = 0.18$, $\mathrm{P}(D|M) = 0.12$ och $\mathrm{P}(D \cap M^C) = 0.3$.

   Totala sannolikhetslagen (eller Venn-diagram) ger

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(D|M)\,\mathrm{P}(M) + \mathrm{P}(D|M^C)\,\mathrm{P}(M^C) = \mathrm{P}(D|M)\,\mathrm{P}(M) + \mathrm{P}(D \cap M^C) \\ &= 0.12 \cdot 0.18 + 0.3 = 0.3216 \approx 32\% \end{aligned}$$

2. Lösning:

   a) $\mathrm{Var}[X + 2Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[2Y] + 2\,\mathrm{Cov}(X, 2Y) =$
   $\mathrm{Var}[X] + 4\,\mathrm{Var}[Y] + 4\,\mathrm{Cov}(X, Y) = 3^2 + 4 \cdot 4^2 + 4 \cdot (-6) = 49$
   b) $\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-6}{3 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$
   c) $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] = -6 + 2 \cdot 5 = 4$

3. Lösning:

   a) Låt X vara antal kärnor i pralinen. Då är $X \sim \mathrm{Po}(4)$ och
   $\mathrm{P}(X \geq 10) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 9) \approx 1 - 0.9919 = 0.81\%$
   b) Låt Y vara antalet praliner med 10 kärnor eller mer. Då är $Y \sim \mathrm{Bin}(40, 0.0081)$ och
   $\mathrm{E}[Y] = 40 \cdot 0.0081 = 0.324 \approx 0.32$ samt $\mathrm{Var}\,Y = 40 \cdot 0.0081 \cdot (1 - 0.0081) \approx 0.321$
   varav $\sigma_Y \approx 0.57$

4. Lösning:
   Enklast är att skriva ned alla 16 möjliga utfall. Låt 0=Krona och 1=Klave:

Utfall	Y
0000	0
0001, 0010, 0100, 1000, 0101, 1010, 1001	1
0011, 0110, 1100, 1011, 1101	2
1110, 0111	3
1111	4

, vilket ger $f_Y(y)$:

y	$f_Y(y)$
0	1/16
1	7/16
2	5/16
3	2/16
4	1/16

   Detta ger

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y] &= 1\frac{7}{16} + 2\frac{5}{16} + 3\frac{2}{16} + 4\frac{1}{16} = \frac{27}{16} \approx 1.688 \\ \mathrm{E}[Y^2] &= 1\frac{7}{16} + 4\frac{5}{16} + 9\frac{2}{16} + 16\frac{1}{16} = \frac{61}{16} \\ \mathrm{Var}\,Y &= \mathrm{E}[Y^2] - (\mathrm{E}[Y])^2 = \frac{61}{16} - \left(\frac{27}{16}\right)^2 = \frac{61 \cdot 16 + 27^2}{256} = \frac{247}{256} \approx 0.9648 \end{aligned}$$

5. Lösning:
   Låt X_i vara ring i's bredd och X tunnelns längd efter att 2499 ringar placerats. Då är $X_i \sim \text{Norm}(2.2, 0.02)$ och $X = \sum_{i=1}^{2499} X_i \sim \text{Norm}(2499 \cdot 2.2, \sqrt{2499} \cdot 0.02)$, dvs med god approximation är $X \sim \text{Norm}(5497.8, 1.0)$

$$\text{P}(X \geq 5500) = \text{P}(X - 5497.8 \geq 2.2) = 1 - \Phi(2.2) \approx 1 - 0.9861 \approx 1.4\%$$

6. Lösning:

   a) $8x + x^2 + 6x^3$
   b) $m_X(t) = \text{E}[e^{tX}] = \frac{1+e^{8t}+e^t+e^{6t}}{4}, \ -\infty < t < \infty$

7. Lösning:

   a) Låt X vara antal röda siffror under $n = 200$ spel. Då är $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Både X och $\hat{p} = \frac{X}{n}$ är approximativt normalfördelade vilket ger det 90%-iga konfidensintervallet:

$$\hat{p} \pm z_{0.05} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

   Med våra värden fås $\hat{p} = \frac{87}{200} = 0.435$ och konfidensintervallet

$$0.435 \pm 1.645 \cdot 0.03506 \approx 43.5\% \pm 5.8\%$$

   b) Nej, sannolikheten för röda siffror borde vara $\frac{18}{37} \approx 0.4865$ vilket ligger i konfidensintervallet.
   c) Välj $n = \frac{z_{0.05}^2}{4 \cdot 0.01^2} \approx 6765 \approx 6800$

8. Lösning:

$$\text{E}[Y] = \int_0^\theta y \frac{2y}{\theta^2} dy = \left[\frac{2y^3}{3\theta^2}\right]_0^\theta = \frac{2}{3}\theta$$

   Men

$$c \cdot \overline{Y} \text{ är v.v.r. } \Leftrightarrow \text{E}[c \cdot \overline{Y}] = \theta \Leftrightarrow c\frac{2}{3}\theta = \theta \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

9. Lösning:
   Vi kan modellera spelande som en markovkedja med övergångsmatris där det fjärde tillståndet motsvarar vinst:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Låt $m_i = \mathrm{E}[\text{antal steg till vinst om vi börjar i tillstånd i}]$. Då gäller

$$\begin{cases} m_4 = 0 \\ m_3 = 1 + 0.9m_2 + 0.1m_4 = 1 + 0.9m_2 \\ m_2 = 1 + 0.8m_1 + 0.2m_3 \\ m_1 = 1 + 0.5m_1 + 0.5m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_4 = 0 \\ m_3 = 127 \\ m_2 = 140 \\ m_1 = 142 \end{cases}$$

Alltså är den förväntade tiden 142 minuter.