Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik IT (MVE055/MSN620).
Den 28 augusti 2007.

1. Lösning:

   a) $\left(\frac{1}{4}\right)^4 \approx 0.39\%$

   b) Antal möjliga utfall är $\binom{52}{5}$. Av dessa är $4\binom{13}{5}$ gynsamma eftersom det finns precis $\binom{13}{5}$ sätt att välja ut fem kort i en specifik färg (t.ex. hjärter). Sannolikheten för fem likafärgade kort blir alltså: $\frac{4\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0.20\%$

2. Lösning:

   a) $X \sim \text{Geom}(\frac{1}{6})$ ger $\sigma_X = \frac{\sqrt{1-p}}{p} = 6\sqrt{5/6} \approx 5.48$;

   b) $Y \sim \text{Bin}(6, \frac{1}{6})$ ger
   $\text{P}(Y > 1) = 1 - \text{P}(Y \leq 1) = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.263$

3. Lösning:
   $S = 0.094934$

   a) Konfidensintervallet ges av:

   $$[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.05}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.95}}]$$

   där nämnarna kommer från en χ^2-fördelning med $n-1 = 7$ frihetsgrader, dvs $\chi^2_{0.05} = 14.1$ och $\chi^2_{0.95} = 2.17$. Intervallet blir alltså:

   $$[0.0045, 0.0291]$$

   b) Då $[0.0045, 0.0291]$ är ett 90%-igt konfidensintervall för variansen så är $[\sqrt{0.0045}, \sqrt{0.0291}] \approx [0.067, 0.171]$ ett 90%-igt konfidensintervall för standardavvikelsen.

4. Lösning:
   Vi har $F_L(l) = \text{P}(L \leq l) = \begin{cases} 0 & , l < 0 \\ \frac{l}{2} & , 0 \leq l \leq 2 \\ 1 & , l > 2 \end{cases}$ och $f_L(l) = \frac{1}{2}$, $0 \leq l \leq 2$.

   Väntevärdet blir $\text{E}[A] = \text{E}[L^2] = \int_0^2 l^2 f_L(l)dl = \int_0^2 \frac{l^2}{2}dl = \left[\frac{l^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$

   För $0 \leq a \leq 4$ fås: $F_A(a) = \text{P}(A \leq a) = \text{P}(L^2 \leq a) = \text{P}(L \leq \sqrt{a}) = F_L(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{2}$, dvs

   $F_A(a) = \begin{cases} 0 & , a < 0 \\ \frac{\sqrt{a}}{2} & , 0 \leq a \leq 4 \\ 1 & , a > 4 \end{cases}$.

   Derivering ger $f_A(a) = \frac{1}{4\sqrt{a}}$, $0 \leq a \leq 4$.

5. Lösning:

a) Låt X vara antal byten som krävs. $X \sim \mathrm{Po}(5)$ ger $\mathrm{P}(X=5) = \frac{e^{-5}5^5}{5!} \approx 17.5\%$

b) Låt Y vara antal år till första bytet sker. $Y \sim \mathrm{Exp}(5)$ ger $\mathrm{E}[Y] = \frac{1}{5}$ och $\mathrm{Var}[Y] = \frac{1}{5^2}$ varav $\sigma_Y = \frac{1}{5}$.

6. Lösning:

a) $1 + 2x + 3x^2$

b) $\frac{1-x^5}{1-x} = \frac{(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x)}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. Sekvensen är alltså 1,1,1,1,1.

7. Lösning:

Låt Y vara antal poäng för en slumpmässigt utvald sistaårsgymnasist och x det värde vi söker. Då är approximativt $Y \sim \mathrm{Norm}(500, 100)$ och $\frac{Y-500}{100} \sim \mathrm{Norm}(0, 1)$. Detta ger

$$P(Y \geq a) = 0.1 \Leftrightarrow P\left(\frac{Y-500}{100} \geq \frac{a-500}{100}\right) \Leftrightarrow \frac{a-500}{100} \approx z_{0.1} \Leftrightarrow a \approx 100z_{0.1} + 500 \approx 628$$

8. Lösning:

Låt $A = \{\text{Alice skickade en etta}\}$ och $B = \{\text{Bob registrerade en etta}\}$.
Då är $\mathrm{P}(A) = 0.5$, $\mathrm{P}(B|A) = 0.9$ och $\mathrm{P}(B|A^C) = 0.2$.
Satsen om total sannolikhet ger
$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B|A) + \mathrm{P}(A^C)(B|A^C) = 0.5 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.55$.
Bayes sats ger nu resultatet $\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0.9 \cdot 0.5}{0.55} \approx 0.82$

9. Lösning:

$$\hat{p} = \frac{5}{1000} = 0.005$$

Vi väljer att ta fram ett 95%-igt dubbelsidigt konfidensintervall genom att utnyttja att $\hat{p}$ är approximativt normalfördelad:

$$\hat{p} \pm z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1000}} \approx 0.0050 \pm 1.96 \cdot 0.002231 \approx 0.50\% \pm 0.44\%$$

Då hela intervallet ligger under 1% så kan vi hävda (med 95 % konfidens) att kravet är uppfyllt!
Obs: Ett enkelsidigt konfidensintervall (eller test) är starkare och egentligen bättre att använda här, men svaret blir detsamma för given data.