MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola — Datum: 2020-06-01 kl. 08.30–12.30

Tentamen — Telefonvakt: Hossein Raufi

Telefon: 0704490237

MVE041 Flervariabelmatematik Z1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

1. (a) För vilka värden på konstanten $a > 0$ gäller att (3 p)

$$\int_0^a \left(\int_y^a \cos(x^2)dx \right) dy = \frac{1}{2}?$$

(b) Beräkna $\displaystyle\iint_D y^2 e^{x^2+y^2} dA$ där D är området $x^2 + y^2 \leq 25$, $x \geq |y|$. (4 p)

2. Beräkna linjeintegralen (5 p)

$$\int_\gamma (x^3 + axy^2)dx + (y^3 + ax^2y)dy$$

där γ är kurvan $y = 3\cos^2(\frac{\pi x}{2})$ från (0,3) till (2,3), och $a \in \mathbb{R}$ är en konstant. För vilket värde på a har linjeintegralen värdet -50?

3. (a) Bestäm en ekvation för tangentlinjen i (1,1,2) till skärningskurvan mellan de två ytorna $x^2 - y^2 - z^2 = -4$ och $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$. (3 p)

(b) Ett visst berg kan i lämpliga enheter modelleras som: (5 p)

$$z = \frac{1}{100}(50 - x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 \leq 50.$$

Vid en vandring från by nr.1 med koordinaterna (7, -1, 0) till by nr.2 med koordinaterna (-1, 3, 0.4) går man på en stig som sett ovanifrån (dvs vars projektion på xy-planet) är det räta linjestycket från (7, -1) till (-1, 3). Var är det brantast uppför respektive nedför i denna stigs riktning och hur stora är lutningarna där? Man vill ta en fikapaus i den punkt där det är plant i stigens riktning. Vilken punkt är det?

4. Bestäm den lösning $f(x, y)$ till den partiella differentialekvationen (6 p)

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = (x^3y + xy^3)f, \quad x > 0, y > 0$$

som uppfyller $f(x, x) = x^2$, genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u = y^2 + x^2, \\ v = y^2 - x^2. \end{cases}$$

Var god vänd!

5. Använd Lagrange-multiplikatorer till att beräkna de punkter på skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x + 2y + 2z = 0$ för vilka y-koordinaten är som störst och som minst. (6 p)

6. Beräkna hur stor del av volymen mellan ytorna $2x^2 + 2y^2 + z = 9$ och $x^2 + y^2 - z = 9$ som ligger över xy-planet. (6 p)

7. Beräkna linjeintegralen (6 p)

$$\int_\gamma \big(2xy - x^2 + y^2 \sin(xy^2)\big)dx + \big(x + y^2 + 2xy \sin(xy^2)\big)dy$$

där γ är den övre halvan av enhetscirkeln moturs från (1,0) till (-1,0).

8. Beräkna flödet bort från origo av vektorfältet (6 p)

$$\mathbb{F}(x, y, z) = (x, (y-1)^2, z)$$

genom ytan $y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$.

Lycka till!

/Hossein