Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Tentamen
2019-10-12, 8:30–12:30

MVE041: Flervariabelmatematik

Examinator: Lukáš Malý / Thomas Wernstål, tel. 031 - 772 35 57
Telefonvakt: tel. 031 - 772 53 25 Filip Wikman
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal och formler på tentatesens baksida. Inga miniräknare är tillåtna.

Betygsgränser: För betyg 3 krävs 20 p; för betyg 4 krävs 30 p; för betyg 5 krävs 40 p (utav 50 p).
Lösningsförslag kommer att publiceras på kurshemsidan senast nästa arbetsdag.

OBS: Alla svar skall vara väl motiverade. Bristande motiveringar kan orsaka poängavdrag.

1. Avgör om följande gränsvärden existerar: (2p + 2p)

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - 2x - y^2 + 2y}{x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2} \qquad \text{(b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - x^2 y + 4y^2}{x^2 + 2y^2}$$

2. Låt $f(x, y) = x^3 - 6x^2 + 2y^3 - 9y^2$.

(a) I vilken riktning växer f som snabbast i punkten $(3, 2)$? Beräkna också riktningsderivatan i den riktningen. (3p)

(b) Finn alla stationära punkter av funktionen f och bestäm deras karaktär. (4p)

3. Beräkna extrempunkter och extremvärden av funktionen $f(x, y) = x^2 - y$ under bivillkoret $x^2 + 4y^2 = 4$ på två olika sätt: (6p)

(i) Eliminera en av variablerna i funktionsuttrycket för f och utför envariabelsoptimering.

(ii) Utnyttja Lagrangemultiplikatorer.

4. Antag att f är en harmonisk funktion i $\mathbb{R}^2$, d.v.s. den uppfyller sambandet (5p)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0 \quad \text{för alla } u, v \in \mathbb{R}.$$

Låt $g(x, y) = f(2xy, x^2 - y^2)$ där $x, y \in \mathbb{R}$. Visa att funktionen g är harmonisk i hela planet, d.v.s. den uppfyller den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad \text{för alla } x, y \in \mathbb{R}.$$

5. En sluten plan kurva (den så kallade *asteroiden*) parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}, \quad \text{där } t \in [0, 2\pi].$$

(a) Bestäm kurvans längd. (3p)

(b) Beräkna arean av området inuti asteroiden med hjälp av Greens sats. (4p)

OBS: Trigonometriska formler finns på baksidan.

Var god vänd!

6. Beräkna trippelintegralen (6p)

$$\iiint_K z\,dV,$$

där K är den kropp som avgränsas av den enmantlade hyperboloiden

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} - \frac{z^2}{2^2} = 1$$

och planen $z = 1$ samt $z = 2$.

7. Finn de reella tal a och b som möjliggör beräkning av kurvintegralen (5p)

$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}, \quad \text{där } \mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + axy - y^3 \\ x^2 + bxy^2 - 4 \end{pmatrix}$$

då γ är en ospecificerad plan kurva som går från punkten $(0,1)$ till punkten $(3,2)$.

Bestäm sedan kurvintegralens värde.

8. Låt K vara den tetraeder i första oktanten som avgränsas dels av planet $4x + 2y + z = 4$ dels av xy-, xz- samt yz-planet. Beräkna det totala flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ genom tetraederns yta inåt, då (5p)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + e^{yz} \\ \sin x - y + \ln(1+z^2) \\ 7xy + 2z \end{pmatrix}.$$

9. Givet punkterna $A = (2,0,0)$, $B = (0,3,0)$ och $C = (0,0,6)$, låt C vara den orienterade kurva som genomlöper omkretsen av triangeln ABC ett varv i riktningen $A \to B \to C \to A$. Beräkna $\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ då (5p)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y - 2z - 5x\sin(x^2) \\ 3x - 9z - \cos^2(y^3) \\ -3x - 7y + 2ze^z \end{pmatrix}.$$

Lycka till!

Några trigonometriska formler

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sqrt{1-\cos v} = \sqrt{2}\sin(\tfrac{v}{2}), \ \ v \in [0, 2\pi], \qquad \sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$
$$\sqrt{1+\cos w} = \sqrt{2}\cos(\tfrac{w}{2}), \ \ w \in [-\pi, \pi], \qquad \cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$