MVE041: FLERVARIABELMATEMATIK Z

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAN 2019-10-12

UPPGIFT 1

(a) Man följer räta linjer mot punkten $(1,1)$ för att hitta en kandidat för gränsvärdet:

Låt $f(x,y) = \dfrac{x^2-2x-y^2+2y}{x^2-2x+y^2-2y+2}$.

Då blir $f(x,1) = \dfrac{x^2-2x-1+2}{x^2-2x+1-2+2} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+1} = 1$

o $f(1,y) = \dfrac{1-2-y^2+2y}{1-2+y^2-2y+2} = \dfrac{-y^2+2y-1}{y^2-2y+1} = -1$.

Således $\lim\limits_{x\to 1} f(x,1) = 1 \neq -1 = \lim\limits_{y\to 1} f(1,y)$

$\Downarrow$

gränsvärdet existerar EJ

Anmärkning: Andra räta linjer kunde ha använts,

t.ex. $y=x$: $f(x,x) = \dfrac{x^2-2x-x^2+2x}{x^2-2x+x^2-2x+2} = \dfrac{0}{2x^2-4x+2} = 0$,

så $\lim\limits_{x\to 1} f(x,x) = 0$

el. allmänt $y = k(x-1)+1$: $f(x, k(x-1)+1) = \ldots = \dfrac{\cancel{(x-1)^2}(1-k^2)}{\cancel{(x-1)^2}(1+k^2)}$

så $\lim\limits_{x\to 1} f(x, k(x-1)+1) = \dfrac{1-k^2}{1+k^2}$

beror av $k\in\mathbb{R}$ och så existerar gränsvärdet INTE

(b) Låt $g(x,y) = \frac{2x^2 - x^2y + 4y^2}{x^2 + 2y^2}$. Följer man räta linjer mot $(0,0)$, så får man $y = kx$ $(k \in \mathbb{R})$:

$$g(x,kx) = \frac{2x^2 - kx^3 + 4k^2x^2}{x^2 + 2k^2x^2} = \frac{2 - kx + 4k^2}{1 + 2k^2} = 2 - \frac{kx}{1+2k^2}$$

Då blir $\lim_{x \to 0} g(x,kx) = 2 - \frac{k \cdot 0}{1+2k^2} = 2^{\circledast}$

samma värde för alla linjer $\Rightarrow$ förhoppningsvis existerar gränsvärdet

Nu behöver man uppskatta $|g(x,y) - \overset{\circledast}{2}| =$

$$= \left| \frac{2x^2 - x^2y + 4y^2}{x^2 + 2y^2} - 2 \right| = \left| \frac{\cancel{2x^2} - x^2y + \cancel{4y^2} - 2(\cancel{x^2 + 2y^2})}{x^2 + 2y^2} \right|$$

$$= \left| \frac{-x^2y}{x^2 + 2y^2} \right| = |y| \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + 2y^2}}_{\leq 1} \leq |y|$$

(nämnaren större än täljaren)

kontinuerlig vid origo och går mot noll

Enligt instängningsregeln är $\lim_{(x,y) \to (0,0)} |g(x,y) - 2| = 0$.

Således existerar $\lim_{(x,y) \to (0,0)} g(x,y) = 2$.

UPPGIFT 2

(a) Funktionen f växer som snabbast i riktningen av dess gradient.

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 12x,\ 6y^2 - 18y)$$

$$\nabla f(3,2) = (3\cdot 3^2 - 12\cdot 3,\ 6\cdot 2^2 - 18\cdot 2) = \underbrace{(-9,\ -12)}_{\text{i denna riktning växer } f \text{ som snabbast}}$$

För att bestämma riktningsderivatan behöver riktningsvektorn normeras: $\vec{v} = \dfrac{\nabla f(3,2)}{\|\nabla f(3,2)\|}$

$$D_{\vec{v}} f(3,2) = \nabla f(3,2) \cdot \vec{v} = \frac{\nabla f(3,2) \cdot \nabla f(3,2)}{\|\nabla f(3,2)\|} \quad \nabla f(3,2) \cdot \nabla f(3,2) = \|\nabla f(3,2)\|^2$$

$$= \frac{\|\nabla f(3,2)\|^{\cancel{2}}}{\cancel{\|\nabla f(3,2)\|}} = \|\nabla f(3,2)\| = \sqrt{(-9)^2 + (-12)^2}$$

$$= \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = \underline{\underline{15}}$$

Anmärkning: $\nabla f(3,2) = -3 \cdot (3,4) \Rightarrow \|\nabla f(3,2)\| = 3 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}$
$= 3 \cdot 5 = 15$

$$\therefore\ \vec{v} = \frac{-\cancel{3}\cdot(3,4)}{\cancel{3}\cdot 5} = \left(\frac{-3}{5},\ \frac{-4}{5}\right)$$

(b) Stationära punkter finnes genom att lösa ekvationen $\nabla f(x,y) = \vec{0}$: $\begin{cases} 3x^2 - 12x = 0 \\ 6y^2 - 18y = 0 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x(x-4) = 0 \\ 6y(y-3) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ eller } x=4 \\ y=0 \text{ eller } y=3 \end{cases}$$

Det finns 4 st stationära punkter: $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,3)$, $(4,3)$

För att bestämma karaktären, undersöks Hessianen.

$$\mathcal{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-12 & 0 \\ 0 & 12y-18 \end{pmatrix}$$

Punkten $(0,0)$: $\mathcal{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$ $\det \mathcal{H}f(0,0) = 216 > 0$, $-12 < 0$ $\Rightarrow$ negativt definit

$(0,0)$ är lok. max

Punkten $(4,0)$: $\mathcal{H}f(4,0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$ $\det \mathcal{H}f(4,0) = -216 < 0$ $\Downarrow$ indefinit

$(4,0)$ är en sadelpkt

Punkten $(0,3)$: $\mathcal{H}f(0,3) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ $\det \mathcal{H}f(0,3) = -216 < 0$ $\Downarrow$ indefinit

$(0,3)$ är en sadelpkt

Punkten $(4,3)$: $\mathcal{H}f(4,3) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ $\det \mathcal{H}f(4,3) = 216 > 0$, $12 > 0$ $\Rightarrow$ positivt definit

$(4,3)$ är lok. min

Anmärkning: Eftersom $\mathcal{H}f$ är diagonal, så ser man direkt att egenvärdena är $\pm 12, \pm 18$

Uppgift 3

Bivillkoret $x^2+4y^2=4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$ beskriver en ellips med halvaxlarna 2 (i x-ledet) & 1 (i y-ledet) & medelpunkten i origo.

(i) Det följer att $x^2=4-4y^2$, så $f(x,y)=x^2-y$
$$= 4-y-4y^2$$
under bivillkoret

Man behöver alltså hitta extrempunkter för funktionen $u(y)=4-y-4y^2$ då $y\in[-1,1]$:

Stationära pkter för u: $u'(y)=-1-8y \Rightarrow y=\frac{-1}{8}$ är stationär

Kandidater för max/min av u är:

- intervallets ändpunkter: $u(-1)=4+1-4=1$
  $u(1)=4-1-4=-1$
- stationära punkter: $u\left(\frac{-1}{8}\right)=4+\frac{1}{8}-\frac{4}{64}=\frac{33}{8}-\frac{1}{16}=$
  $=\frac{65}{16}=4\frac{1}{16}$

Minimumet -1 antas i punkten $y=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4-4\cdot 1}=0$
d.v.s. i punkten $(0,1)$

Maximumet $4\frac{1}{16}$ antas i punkten $y=\frac{-1}{8} \Rightarrow x=\pm\sqrt{4-\frac{4}{64}}=\frac{\pm\sqrt{63}}{4}$
d.v.s. i punkterna $\left(\frac{3\sqrt{7}}{4},\frac{-1}{8}\right)$ & $\left(\frac{-3\sqrt{7}}{4},\frac{-1}{8}\right)$

Anmärkning: Det ginge bra att parametrisera ellipsen $x=2\cos t$, $y=\sin t$ & undersöka $v(t)=(2\cos t)^2-\sin t$, $t\in[-\pi,\pi]$

(ii) Lagrangefunktionen blir

$$L(x,y,\lambda) = x^2 - y + \lambda(x^2+4y^2-4).$$ Ska lösa $\nabla L = \vec{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda \cdot 2x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -1 + \lambda \cdot 8y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 4y^2 - 4$$

$2x + \lambda \cdot 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(1+\lambda) = 0$ $\to$ FALL 1: $x = 0$; FALL 2: $\lambda = -1$

FALL 1: $(x=0)$ $\quad \underset{0}{x^2} + 4y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

kandidat 1: $f(0,1) = 0^2 - 1 = -1$

kandidat 2: $f(0,-1) = 0^2 + 1 = 1$

FALL 2: $(\lambda = -1)$ $\quad -1 + \underset{-1}{\lambda} \cdot 8y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{8}$

$x^2 + 4\underset{(-1/8)^2}{y^2} = 4 \Rightarrow x^2 = 4 - \frac{4}{64} = 4 - \frac{1}{16} = \frac{63}{16} \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{63}}{4}$

kandidat 3: $f\left(\frac{\sqrt{63}}{4}, \frac{-1}{8}\right) = \frac{63}{16} + \frac{1}{8} = \frac{65}{16} = 4\frac{1}{16}$

Kandidat 4: $f\left(\frac{-\sqrt{63}}{4}, \frac{-1}{8}\right) = \frac{63}{16} + \frac{1}{8} = \frac{65}{16} = 4\frac{1}{16}$

Observera att $\underset{\text{bivillkoret}}{\nabla g} = \vec{0}$ endast i $(0,0)$ som inte uppfyller bivillkoret så är den inte relevant.

Svar: f antar sitt minimivärde, -1, i pkten $(0,-1)$.

f antar sitt maximivärde, $4\frac{1}{16}$, i två punkter: $\left(\frac{\sqrt{63}}{4}, \frac{-1}{8}\right)$ & $\left(\frac{-\sqrt{63}}{4}, \frac{-1}{8}\right)$

UPPGIFT 4

Enligt kedjeregeln är:

$$g'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = 2y\, f'_u + 2x\, f'_v$$

$$g''_{xx} = 2y\left(f''_{uu}\, u'_x + f''_{uv}\, v'_x\right) + 2 f'_v + 2x\left(f''_{vu}\, u'_x + f''_{vv}\, v'_x\right)$$

$$= 2f'_v + 4y^2 f''_{uu} + 4xy\left(f''_{uv} + f''_{vu}\right) + 4x^2 f''_{vv}$$

$$g'_y = f'_u\, u'_y + f'_v\, v'_y = 2x\, f'_u - 2y\, f'_v$$

$$g''_{yy} = 2x\left(f''_{uu}\, u'_y + f''_{uv}\, v'_y\right) - 2 f'_v - 2y\left(f''_{vu}\, u'_y + f''_{vv}\, v'_y\right)$$

$$= -2f'_v + 4x^2 f''_{uu} - 4xy\left(f''_{uv} + f''_{vu}\right) + 4y^2 f''_{vv}$$

$$\Delta g = g''_{xx} + g''_{yy} = \cancel{2f'_v} + 4y^2 f''_{uu} + \cancel{4xy\left(f''_{uv} + f''_{vu}\right)} + 4x^2 f''_{vv}$$

$$\cancel{-2f'_v} + 4x^2 f''_{uu} \cancel{- 4xy\left(f''_{uv} + f''_{vu}\right)} + 4y^2 f''_{vv}$$

$$= \left(4y^2 + 4x^2\right) f''_{uu} + \left(4x^2 + 4y^2\right) f''_{vv}$$

$$= \left(4x^2 + 4y^2\right) \cdot \underbrace{\left(f''_{uu} + f''_{vv}\right)}_{= \Delta f = 0 \text{ enligt förutsättningen}} = \left(4x^2 + 4y^2\right) \cdot 0 = 0$$

$\therefore \quad \Delta g = 0 \qquad$ V.S.B.

UPPGIFT 5

(a) $\ell = \int_0^{2\pi} \| \vec{r}\,'(t) \| \, dt$

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -3\cos^2 t \sin t \\ 3\sin^2 t \cos t \end{pmatrix} = 3 \sin t \cos t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\| \vec{r}\,'(t) \| = 3\, |\sin t \cos t| \sqrt{(-\cos t)^2 + \sin^2 t} = 3 \cdot |\sin t \cos t|$$
$$= \frac{3}{2} \cdot |\sin 2t|$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} |\sin 2t| \, dt = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin 2t \, dt = 6 \left[\frac{-\cos 2t}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{-(-1)}{2} + \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{6 \text{ l.e.}}}$$

Anmärkning: Det går bra att dela upp $\int_0^{2\pi} |\sin 2t|$ i fyra delar: $\int_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2t\,dt + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin 2t\,dt - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin 2t\,dt$

(b) Enligt Greens sats är $A = \iint_D 1 \, dA = \oint_C x \, dy$

$$\oint_C x\,dy = \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^3 t}_{x} \cdot \underbrace{3\sin^2 t \cos t \, dt}_{dy} = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \sin^2(2t)\,dt$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} \cdot \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} 1 + \cos 2t - \cos 4t - c2t\,c4t$$

$$= \frac{3}{16} \left(\left[t + \frac{\sin 2t}{2} - \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\cos(-2t) + \cos(6t) \right) dt \right)$$

$$= \frac{3}{16} \left(2\pi + \frac{0}{2} - \frac{0}{4} - \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{\sin(-2t)}{-2} + \frac{\sin 6t}{6} \right]_0^{2\pi}}_{=0} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{8}\pi}} \text{ a.e.}$$

UPPGIFT 6

Inför cylindriska koordinater: $x = r\cos t$
$y = r\sin t$
$z = h$

Integranden: $z = h$

Funktionaldeterminanten: $|\det J| = r$

Integrationsområdets avgränsning:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1 \iff \frac{r^2\cancelto{1}{(\cos^2 t + \sin^2 t)}}{9} - \frac{h^2}{4} = 1 \iff r^2 = \frac{9}{4}(4+h^2)$$

$z = 1 \iff h = 1$

$z = 2 \iff h = 2$

$$\underset{r \geq 0}{\iff} r = \frac{3}{2}\sqrt{4+h^2}$$

Integrationsområdet: $0 \leq r \leq \frac{3}{2}\sqrt{4+h^2}$
$1 \leq h \leq 2$
$-\pi \leq t \leq \pi$

$$\iiint_K z\, dV = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_1^2\left(\int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{4+h^2}} r\, h\, dr\right) dh\right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_1^2 \left[\frac{hr^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}\sqrt{4+h^2}} dr$$

$$= 2\pi \int_1^2 \frac{9}{8} h(4+h^2)\, dh = \frac{9}{4}\pi \int_1^2 (4h + h^3)\, dh$$

$$= \frac{9}{4}\pi \left[2h^2 + \frac{h^4}{4}\right]_1^2 = \frac{9}{4}\pi\left(8 + \frac{16}{4} - 2 - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{9}{4}\pi \cdot 9\tfrac{3}{4} = \frac{9 \cdot 39}{4 \cdot 4}\pi = \underline{\underline{\frac{351}{16}\pi}}$$

UPPGIFT 7

Integralens värde kan bestämmas oavsett den exakta vägen som kurvan tar ifall fältet $\vec{F}$ är konservativt.

Det krävs att $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$: $\overbrace{ax - 3y^2}^{\partial F_1/\partial y} = \overbrace{2x + by^2}^{\partial F_2/\partial x}$

Dessa ska vara lika i $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \underline{\underline{a=2}}$ & $\underline{\underline{b=-3}}$

Nu kommer $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \Phi(3,2) - \Phi(0,1)$ där Φ är en potentialfunktion till $\vec{F}$, d.v.s. den uppfyller $\boxed{\nabla\Phi = \vec{F}}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \boxed{=} F_1 = 2 + 2xy - y^3 \Rightarrow \Phi(x,y) = \int 2 + 2xy - y^3\,dx$$
$$= 2x + x^2y - xy^3 + c(y)$$

$\nabla\Phi = \vec{F}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^2 - 3xy^2 + c'(y) \boxed{=} F_2 = x^2 - 3xy^2 - 4$$

$$\Rightarrow c'(y) = -4 \Rightarrow c(y) = -4y + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \Phi(x,y) = 2x + x^2y - xy^3 - 4y + k$$

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{2\cdot 3 + 3^2\cdot 2 - 3\cdot 2^3 - 4\cdot 2 + k}_{\Phi(3,2)} - \underbrace{(2\cdot 0 + 0^2\cdot 1 - 0\cdot 1^3 - 4\cdot 1 + k)}_{\Phi(0,1)}$$

$$= \underline{\underline{-4}}$$

Uppgift 8

Enligt divergenssatsen (Gauß) är

$$\oiint_{\partial K} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = - \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

pekar inåt

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + e^{yz}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin x - y + \ln(1+z^2)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(7xy + 2z\right)$$

$$= 2x - 1 + 2 = 2x + 1$$

Tetraedern beskrivs av olikheterna: $x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0,$
$4x + 2y + z \leq 4$

Trippelintegralen beräknas som itererad integral $\int_{\cdots}\left(\int_{\cdots}\left(\int_{\cdots} \ldots dz\right)dy\right)dx$

Integrationsgränserna är: $0 \leq z \leq 4 - (4x + 2y)$

$0 \leq 2y \leq 4 - 4x \iff 0 \leq y \leq 2 - 2x$

$0 \leq 2x \leq 2 \iff 0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} \left(\int_0^{4-4x-2y} (2x+1) \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (2x+1)(4-4x-2y) \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} -8x^2 + 4x + 4 - (2x+1)2y \, dy \, dx = \int_0^1 (-8x^2+4x+4)(2-2x) - (2x+1)(2-2x)^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 16x^3 - 24x^2 + 8 - (8x^3 - 12x^2 + 4) \, dx = \left[\frac{8x^4}{4} - \frac{12x^3}{3} + 4x \right]_0^1$$

$$= 2 - 4 + 4 = 2$$

$$\therefore \oiint_{\partial K} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = -2$$

UPPGIFT 9

Enligt Stokes sats är $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_T (\text{curl}\,\vec{F})\cdot \hat{N}\, dS$

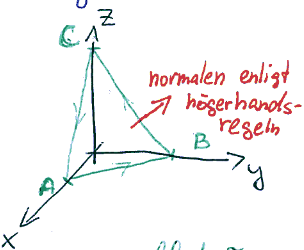
där T är den triangulära ytan mellan punkterna A, B, C.

$$\text{curl}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y-2z-5x\sin(x^2) \\ 3x-9z-\cos^2(y^3) \\ -3x-7y+2z e^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7-(-9) \\ -2-(-3) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Triangeln ligger i planet $3x+2y+z=6$ (i 1:a oktanten)

Den parametriseras enklast av $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 6-3x-2y \end{pmatrix}$ där

$$x \geq 0,\quad y \geq 0 \quad \& \quad \overbrace{3x+2y \leq 6}^{\Leftrightarrow\, z \geq 0}$$



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pekar bort från origo, vilket är rätt orientering för Stokes sats

$$\iint_T (\text{curl}\,\vec{F})\cdot d\vec{S} = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{6-3x}{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} dy \right) dx = 10 \int_0^2 \frac{6-3x}{2}\, dx$$

$$= 5\left[6x - 3\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 5\cdot(12-6) = \underline{\underline{30}}$$

Svar: $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 30$