Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Tentamen
2019-08-30, 8:30–12:30

MVE041: Flervariabelmatematik

Examinator: Lukáš Malý / Thomas Wernstål, tel. 031 - 772 35 57
Telefonvakt: Jimmy Aronsson, tel. 031 - 772 53 25
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal och formler på tentatesens baksida. Inga miniräknare är tillåtna.

Betygsgränser: För betyg 3 krävs 20 p; för betyg 4 krävs 30 p; för betyg 5 krävs 40 p (utav 50 p).
Lösningsförslag kommer att publiceras på kurshemsidan senast nästa arbetsdag.

OBS: Alla svar skall vara väl motiverade. Bristande motiveringar kan orsaka poängavdrag.

1. Avgör om följande gränsvärden existerar: (2p + 2p)

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+x^3+y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{(b)} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y+1)}{x^2+y^2-2y+1}$$

2. Låt $f(x,y) = 3xy - e^{x^2+y^2-5}$.

(a) Bestäm en ekvation för tangentlinjen till nivåkurvan till f genom punkten $(2,1)$. (2p)

(b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till grafen $z = f(x,y)$ i punkten $(2,1,5)$. (2p)

(c) Funktionen f har en stationär punkt i origo. Avgör om den är ett lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera. (3p)

3. Bestäm extrempunkter och extremvärden av $f(x,y,z) = 2+z^2$ då dess definitionsmängd utgörs av skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2=8$ och planet $x+y+z=2$. (6p)

4. Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen (5p)

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + y^2, \qquad (x \in \mathbb{R},\ y > 0)$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $f(x,0) = 6x + \cos 2x$.

Tips: Använd variabelbytet $u = 2x+y^2$ och $v = 3-y$. Med andra ord får du använda ansatsen $f(x,y) = g(2x+y^2, 3-y)$, där $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är en kontinuerligt differentierbar funktion.

5. Låt C vara en cirkel med radien 2 och medelpunkten i origo som genomlöps ett varv moturs. Beräkna cirkulationsintegralen $\oint_C (xy^2+y)\,dx + (2x+x^2y)\,dy$ på två olika sätt:

(i) Parametrisera kurvan C och beräkna cirkulationsintegralen direkt. (4p)

(ii) Använd Greens sats. (3p)

OBS: Trigonometriska formler finns på baksidan.

Var god vänd!

6. Beräkna trippelintegralen (6p)

$$\iiint_K \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\, dV,$$

där K är den del av kroppen $4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 16$ som ligger under konytan $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ medan $y \geq x$ och samtidigt $y \geq -x$.

7. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ett slät vektorfält som är konservativt i hela rummet $\mathbb{R}^3$. Antag att dess potentialfunktion är *harmonisk*. Bevisa att $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ och att $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. (5p)

Tips: Funktionen Φ kallas harmonisk om $\Delta\Phi = 0$, d.v.s. om $\Phi''_{xx} + \Phi''_{yy} + \Phi''_{zz} = 0$.

8. Använd Gauß sats (divergenssatsen) till att beräkna volymen av den kropp vars yta parametriseras av (5p)

$$\begin{cases} x(u,v) = \cos u \cos v, \\ y(u,v) = \cos u \sin v, \\ z(u,v) = \sin 2u, \qquad \text{då } u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ och } v \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Tips: Vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & z \end{pmatrix}^T$ kommer att funka alldeles utmärkt i divergenssatsen eftersom $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1$.

9. Låt C vara skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2 = 1$ och den hyperboliska paraboloiden $z = 2xy$. Beräkna kurvintegralen $\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin x - y^3 \\ \cos y + x^3 \\ e^z \end{pmatrix}$ och kurvan C genomlöps ett varv moturs (sett uppifrån). (5p)

Lycka till!

Några trigonometriska formler

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sqrt{1-\cos v} = \sqrt{2}\sin(\tfrac{v}{2}),\ \ v \in [0,2\pi], \qquad \sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$
$$\sqrt{1+\cos w} = \sqrt{2}\cos(\tfrac{w}{2}),\ \ w \in [-\pi,\pi], \qquad \cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$