MVE041: FLERVARIABELMATEMATIK Z

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAN 2019-08-30

UPPGIFT 1

(a) Man hittar en kandidat för gränsvärde genom att följa räta linjer mot origo:

$$f(x,y)=\frac{x^2+x^3+y^2}{x^2+y^2} \underset{y=kx}{\Longrightarrow} f(x,kx)=\frac{x^2+x^3+k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{1+k^2+x}{1+k^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{1+k^2+x}{1+k^2}=\frac{1+k^2}{1+k^2}=1^{\circledast}$$

beror EJ av $k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ gränsvärdet förhoppningsvis existerar

Nu behöver man uppskatta $\left|f(x,y)-1^{\circledast}\right|=\left|\frac{x^2+x^3+y^2}{x^2+y^2}-1\right|$

$$=\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|=|x|\cdot\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1}\leq |x|$$ ... kontinuerlig vid origo och går mot noll

Enligt instängningsregeln är $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)-1|=0$

således existerar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1$

(b) Följ räta linjer mot punkten $(0,1)$:

$$f(x,y)=\frac{x^2(y+1)}{x^2+y^2-2y+1} \underset{y=kx+1}{\Longrightarrow} f(x,kx+1)=\frac{x^2(kx+2)}{x^2+(kx)^2}=$$

$$=\frac{kx+2}{1+k^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx+1)=\lim_{x\to 0}\frac{kx+2}{1+k^2}=\frac{2}{1+k^2}$$

beror av $k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ gränsvärdet existerar EJ

UPPGIFT 2

$$f(x,y)=3xy-e^{x^2+y^2-5}$$

(a) Vektorn $\nabla f(2,1)$ är normal till nivåkurvan och således til den sökta tangentlinjen.

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y-2x\,e^{x^2+y^2-5}\\ 3x-2y\,e^{x^2+y^2-5}\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2,1)=\begin{pmatrix}3\cdot 1-2\cdot 2\,e^{2^2+1^2-5}\\ 3\cdot 2-2\cdot 1\,e^{2^2+1^2-5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-4e^0\\ 6-2e^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix}$$

Tangentlinjens ekvation blir $(-1)x+4y=c$, där c bestäms genom att sätta in pkten $(2,1)$: $c=(-1)\cdot 2+4\cdot 1=2$

Svar: Tangentlinjens ekvation är $\underline{\underline{-x+4y=2}}$

(b) Tangentplanets ekvation ges av linjäriseringen kring pkten $(2,1)$:

$$z = \underbrace{f(2,1)}_{=5} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)}_{=-1}(x-2) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)}_{=4}(y-1)$$

$$z = 5 - x + 2 + 4y - 4 \rightsquigarrow x - 4y + z = 3$$

Svar: Tangentplanets ekvation är $\underline{x-4y+z=3}$

(c) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2e^{x^2+y^2-5} - 4x^2 e^{x^2+y^2-5} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2e^{-5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3 - 4xy\,e^{x^2+y^2-5} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{x^2+y^2-5} - 4y^2 e^{x^2+y^2-5} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2e^{-5}$$

Hessianen i origo blir $\mathcal{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} -2e^{-5} & 3 \\ 3 & -2e^{-5} \end{pmatrix}$

$$\det \mathcal{H}f(0,0) = (-2e^{-5})(-2e^{-5}) - 3 \cdot 3 = \underbrace{4e^{-10}}_{\text{pyttelitet}} - 9 < 0$$

Den kvadratiska formen är således indefinit, vilket gör att f har en sadelpunkt i origo.

Svar: Origo är varken maximi-, eller minimipunkt.

Uppgift 3

Definitionsmängden är en sned ellips som är begränsad o slutet (således kompakt) medan funktionen f är kontinuerligt. Därför antar f sina extremvärden.

Låt

$$\left.\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^2+y^2-8 \\ h(x,y,z) &= x+y+z-2 \end{aligned}\right\} \text{bivillkoren}$$

Enligt satsen om Lagrange multiplikatorer finnes (kandidater för) extrempunkterna genom att (a) bestämma var ∇g o ∇h är linj. beroende eller (b) bestämma stationära punkter av Lagrange-funktionen $L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$

Fall (a): $\nabla g = (2x, 2y, 0)$ o $\nabla h = (1,1,1)$ blir linjärt beroende i pkterna $(0,0,z)$ med $z \in \mathbb{R}$.

Sådana pkter ligger dock INTE på cylindern $x^2+y^2=8$ o så får man inga kandidater

Fall (b):
$$\nabla L = \begin{pmatrix} 0 + \lambda\cdot 2x + \mu\cdot 1 \\ 0 + \lambda\cdot 2y + \mu\cdot 1 \\ 2z + \quad + \mu\cdot 1 \\ x^2+y^2-8 \\ x+y+z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda 2x+\mu=0\\ \lambda 2y+\mu=0\end{array}\right\} \Rightarrow 2\lambda(x-y)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=0 & \text{FALL 1}\\ \text{eller} & \\ x=y & \text{FALL 2}\end{cases}$$

FALL 1: $(\lambda=0)$:

$$\cancel{\lambda}2x+\mu=0 \Longrightarrow \mu=0$$

$$2z+\cancel{\mu}=0 \Longrightarrow z=0$$

$$x+y+\cancel{z}-2=0 \Longrightarrow y=2-x$$

$$x^2+y^2-8=0 \Longrightarrow x^2+(2-x)^2-8=0$$

$$2x^2-4x-4=0 \Leftrightarrow x^2-2x-2=0$$

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1^2+2}=1\pm\sqrt{3} \Longrightarrow y_{1,2}=2-(1\pm\sqrt{3})=1\mp\sqrt{3}$$

Kandidat 1: $f(1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3},\ 0)=2+0^2=2$

kandidat 2: $f(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3},\ 0)=2+0^2=2$

FALL 2 $(x=y)$:

$$x^2+y^2-8=0 \Longrightarrow x^2+x^2-8=0 \Leftrightarrow x^2=4$$

$$\Leftrightarrow x_{3,4}=\pm 2$$

$$y_{3,4}=\pm 2$$

$$x+y+z-2=0 \Longrightarrow z=2-2x \Longrightarrow \begin{cases} z_3=-2\\ z_4=6\end{cases}$$

Kandidat 3: $f(2,\ 2,\ -2)=2+(-2)^2=6$

kandidat 4: $f(-2,\ -2,\ 6)=2+6^2=38$

SVAR: f antar sitt maximum, 38, i pkten $(-2,-2,6)$

f antar sitt minimum, 2, i pkterna $(1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3},0)$ o $(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3},\ 0)$

ANMÄRKNING: Man skulle kunna använda en alternativ formulering av Lagrange multiplikatorsatsen som ger svaret något snabbare:

Kandidater för extrempunkter finnes genom att bestämma var ∇f, ∇g o ∇h är linj. beroende, d.v.s. var

$$\det\begin{pmatrix} \nabla f \\ \nabla g \\ \nabla h \end{pmatrix} = 0$$

förutsatt att båda bivillkoren är uppfyllda.

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2z\,(2x-2y) = 0$$

FALL 1': $x=y$
eller
$z=0$ FALL 2'

FALL 1' ($x=y$): $x^2+y^2-8=0 \Rightarrow x_{1,2}=y_{1,2}=\pm 2$

$$x+y+z=2 \Rightarrow \begin{cases} z_1=-2 \\ z_2=6 \end{cases}$$

FALL 2' ($z=0$): $x+y+z=2 \Rightarrow y=2-x$

$$x^2+y^2=8 \Rightarrow x_{3,4}=1\pm\sqrt{3} \Rightarrow y_{3,4}=1\mp\sqrt{3}$$

KANDIDATER: $f(2,2,-2)=6$ $\quad f(-2,-2,6)=38 \leftarrow$ MAX

$$f(1\pm\sqrt{3},\ 1\mp\sqrt{3},\ 0)=2 \leftarrow \text{MIN}$$

UPPGIFT 4

Tips: $f(x,y) = g(\overbrace{2x+y^2}^{u}, \overbrace{3-y}^{v})$

Kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = g'_u \cdot 2 + g'_v \cdot 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = g'_u \cdot 2y + g'_v \cdot (-1)$$

Insättning i PDE:n ger att:

$$\cancel{y\cdot(2g'_u)} - (\cancel{2y\, g'_u} - g'_v) = \underbrace{2x+y^2}_{=u}$$

Således $\quad g'_v = u \quad \Rightarrow \quad g(u,v) = u\cdot v + k(u)$

okänd funktion som bestäms m.h.a begynnelsevillkoret

$$f(x,y) = (2x+y^2)(3-y) + k(2x+y^2)$$

$$f(x,0) = (2x+0^2)(3-0) + k(2x+0^2) = \underbrace{6x + k(2x) \overset{!}{=} 6x + \cos(2x)}_{\Rightarrow k(u) = \cos u}$$

SVAR: $f(x,y) = (2x+y^2)(3-y) + \cos(2x+y^2)$

Uppgift 5

(i) Cirkelns parametrisering: $x(t) = 2\cos t$
$y(t) = 2\sin t$
$t \in [-\pi, \pi]$

$x'(t) = -2\sin t, \quad y'(t) = 2\cos t.$

$$\oint_{\mathcal{C}} (xy^2+y)\,dx + (2x+x^2y)\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} (2\cos t \cdot 4\sin^2 t + 2\sin t)\cdot(-2\sin t)$$
$$+ (4\cos t + 4\cos^2 t \cdot 2\sin t)\cdot 2\cos t\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} -16\cos t \sin^3 t \underbrace{-4\sin^2 t}_{=4\cos^2 t - 4} + 8\cos^2 t + 16\cos^3 t \sin t \,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{16\sin t\cos t}_{8\sin 2t}\underbrace{(\cos^2 t - \sin^2 t)}_{\cos 2t}}_{4\sin 4t} + \underbrace{12\cos^2 t}_{=6(1+\cos 2t)} - 4\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 4\sin 4t + 2 + 6\cos 2t\,dt = \Big[-\cos 4t + 2t + 3\sin 2t\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \underline{\underline{4\pi}}$$

(ii) $$\oint_{\mathcal{C}} (xy^2+y)\,dx + (2x+x^2y)\,dy \overset{\text{Green}}{=} \iint_{D} \frac{\partial(2x+x^2y)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2+y)}{\partial y}\,dA$$
$D \leftarrow$ cirkelskivan

$$= \iint_D 2 + 2xy - (2xy+1)\,dA = \iint_D 1\,dA = \text{cirkelskivans area}$$
$$= \pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{4\pi}}$$

Uppgift 6

Inför sfäriska koordinater:

$$x = r\cos\theta\sin\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\varphi$$

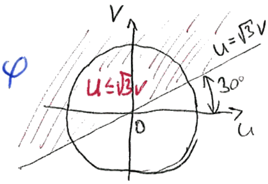
Integrand: $\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{r\cos\varphi}{r^2} = \dfrac{\cos\varphi}{r}$

Funktionaldeterminant: $|\det J| = r^2\sin\varphi$

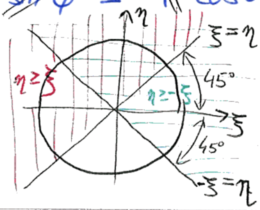
Integrationsområdet:

- $4 \le \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=r^2} \le 16 \Rightarrow 2 \le r \le 4$
- $z \le \sqrt{3\underbrace{(x^2+y^2)}_{=r^2\sin^2\varphi}} \Rightarrow \cancel{r}\cos\varphi \le \cancel{r}\sqrt{3}\sin\varphi$

$$\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$$



- $y \ge x \Rightarrow \cancel{r}\sin\theta\,\cancel{\sin\varphi} \ge \cancel{r}\cos\theta\,\cancel{\sin\varphi} \Rightarrow \sin\theta \ge \cos\theta$
- $y \ge -x \Rightarrow \cancel{r}\sin\theta\,\cancel{\sin\varphi} \ge -\cancel{r}\cos\theta\,\cancel{\sin\varphi} \Rightarrow \sin\theta \ge -\cos\theta$



$$\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$\iiint_K \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\,dV = \int_2^4 \left(\int_{\pi/6}^{\pi} \left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cos\varphi}{r} \cdot r^2 \sin\varphi \, d\theta \right) d\varphi \right) dr$$

$$= \int_2^4 r\,dr \cdot \int_{\pi/6}^{\pi} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \cdot \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^4 \cdot \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi} \cdot$$

$$\cdot \left[\theta\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{16-4}{2} \cdot \frac{0-1/4}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{-\frac{3}{8}\pi}}$$

Uppgift 7

Låt Φ vara potentialfunktion av $\vec{F}$. Då blir

$$\vec{F} = \nabla \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\Phi \\ \frac{\partial}{\partial y}\Phi \\ \frac{\partial}{\partial z}\Phi \end{pmatrix}$$

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Phi'_x \\ \Phi'_y \\ \Phi'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi''_{zy} - \Phi''_{yz} \\ \Phi''_{xz} - \Phi''_{zx} \\ \Phi''_{xy} - \Phi''_{yx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ordningen av partiella derivator kan kastas om eftersom $\vec{F}$ (således Φ) är slät

$$\text{div } \vec{F} = \text{div } (\nabla \Phi) = \Delta \Phi \overset{\Phi \text{ är harmonisk}}{=} 0$$

V.S.B.

Uppgift 8

$$\text{Volymen} = \iiint_K 1 \, dV \overset{\text{Tips}}{=} \iiint_K \text{div} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} dV \overset{\text{Gauß}}{=} \oiint_{\partial K} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \cdot d\vec{S} = (*)$$

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin 2u \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ 2\cos 2u \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -2\cos 2u \cos u \cos v \\ -2 \cos 2u \cos u \sin v \\ -\underbrace{\sin u \cos u}_{=\frac{1}{2}\sin 2u} \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_{=1} \end{pmatrix}$$

vet inte om detta vektorfält pekar utåt eller inåt

$$(*) = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin 2u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} *** \\ *** \\ -\frac{1}{2}\sin 2u \end{pmatrix} dv \right) du \right|$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sin^2(2u)\, du \int_0^{2\pi} dv = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{1-\cos 4u}{2}\, du$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[u - \frac{\sin 4u}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{2}}}$$

Anmärkning: Abs. beloppet behövs eftersom man inte vet om $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ pekar utåt vilket krävs i div. satsen

---

UPPGIFT 9

Enligt Stokes sats är $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{Y} (\text{curl } \vec{F}) \cdot dS$

där Y är den del av ytan $z = xy$ som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 \leq 1$. Normalvektorn ska peka uppåt p.g.a. högerhandsregeln.

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin x - y^3 \\ \cos y + x^3 \\ e^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 3x^2 - (-3y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

Man kan utgå från cylindriska koordinater för att parametrisera ytan.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h \end{cases}$$

$$z = xy \Rightarrow h = r^2\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta$$

$$x^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \leq 1 \Leftrightarrow r^2 \leq 1$$

Parametrisering är alltså

$$\rho(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad r\in[0,1], \ \theta\in[0,2\pi]$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ r\sin 2\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ r^2\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} \times \frac{\partial\rho}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} r^2(\sin\theta\cos 2\theta - \cos\theta\sin 2\theta) \\ -r^2(\sin\theta\sin 2\theta + \cos\theta\cos 2\theta) \\ r\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} *** \\ *** \\ r \end{pmatrix}$$

z-komponenten är positivt, så denna normal pekar uppåt vilket är OK orientering

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} *** \\ *** \\ r \end{pmatrix} d\theta\, dr = \int_0^1 3r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \left[\frac{3r^4}{4}\right]_0^1 \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{4}\cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{3}{2}\pi}}$$