Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Tentamen
2019-06-03, 8:30–12:30

MVE041: Flervariabelmatematik

Examinator: Lukáš Malý, tel. 031 - 772 53 42
Telefonvakt: Felix Held, tel. 031 - 772 53 25
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal och formler på tentatesens baksida. Inga miniräknare är tillåtna.

Betygsgränser: För betyg 3 krävs 20 p; för betyg 4 krävs 30 p; för betyg 5 krävs 40 p (utav 50 p).
Lösningsförslag publiceras på kurshemsidan idag kl. 14:30.
Granskningstillfälle meddelas via kurshemsidan och meddelande från Canvas.

OBS: Alla svar skall vara väl motiverade. Bristande motiveringar kan orsaka poängavdrag.

1. Avgör om följande gränsvärden existerar: (4p)

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6y^2 - 2y^3 + 3x^2}{x^2 + 2y^2} \qquad \text{(b)} \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{yx - y}{x^2 - 2x + y^2 + 1}$$

2. Funktionen $f(x, y) = e^{2x-3y} - 2x + 3y + 5xy$ har en stationär punkt i origo. Avgör om den är ett lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera. (3p)

3. Bestäm alla tangentplan till ellipsoiden $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1$ som är parallella med planet $x - y + z = 0$. (4p)

Tips: Börja med att bestämma normalvektorn för tangentplanet i en obestämd punkt (x, y, z) på ellipsoiden. Därefter bestäms alla punkter på ellipsoiden sådana att normalvektorn får den riktning som efterfrågas i uppgiften.

4. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ då definitionsmängden består av de punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller olikheten $x^4 + y^4 \leq 1$. (6p)

5. Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är en kontinuerligt deriverbar funktion. Visa att funktionen (5p)

$$u(x, y, z) = e^{z^2} f\big(\sin(x^2 - y^2), \cos(y^2 - x^2)\big), \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

löser den partiella differentialekvationen

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2zu.$$

6. Beräkna dubbelintegralen (5p)

$$\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2}\, dA,$$

där D är området beskrivet av olikheterna $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16; \quad x \geq 0 \quad$ och $\quad y \leq x$.

Var god vänd!

7. Beräkna trippelintegralen (6p)

$$\iiint_K \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\,dV,$$

där K är den del av kroppen $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$ som ligger i första oktanten ovanför konytan $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

8. Avgör om vektorfältet (6p)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y + z\cos(xz) + 1 \\ x + ze^{yz} - 2 \\ ye^{yz} + x\cos(xz) + 3 \end{pmatrix}$$

är konservativt i hela rummet $\mathbb{R}^3$.

Beräkna sedan kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där C är sträckan som går från punkten $(0,3,2)$ till punkten $(\pi,-1,1/2)$.

9. (a) Låt C vara en enkel sluten kurva i planet. Antag att $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerligt differentierbara funktioner. Bestäm (3p+2p)

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}, \quad \text{där } \mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(y) \end{pmatrix}.$$

(b) Låt γ vara randen av kvadraten $[0,1]\times[0,1]$ som genomlöps en gång moturs. Antag att $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en kontinuerligt differentierbar funktion. Bestäm

$$\oint_\gamma \mathbf{H} \bullet d\mathbf{r}, \quad \text{där } \mathbf{H}(x,y) = \begin{pmatrix} h(y) \\ h(x) \end{pmatrix}.$$

10. Låt K vara klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 9$ vars yta är orienterad så att normalvektorerna pekar utåt. Beräkna (6p)

$$\text{(a)} \oiint_{\partial K} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS, \qquad \text{(b)} \oiint_{\partial K} (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS, \qquad \text{där } \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + e^{yz} \\ \cos(xz) - 2y \\ \ln(3+xy) + 3z \end{pmatrix}.$$

Lycka till!

Några trigonometriska formler

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sqrt{1-\cos v} = \sqrt{2}\sin(\tfrac{v}{2}),\ \ v \in [0,2\pi], \qquad \sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$
$$\sqrt{1+\cos w} = \sqrt{2}\cos(\tfrac{w}{2}),\ \ w \in [-\pi,\pi], \qquad \cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$