Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Lösningsförslag till tentamen
2019-06-03, 8:30–12:30

MVE041: Flervariabelmatematik

Uppgift 1. (a) Man börjar med att undersöka funktionsuttrycket på vägen mot origo längs räta linjer $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{6y^2 - 2y^3 + 3x^2}{x^2 + 2y^2} = \Big/ y = kx \Big/ = \frac{6k^2x^2 - 2k^3x^3 + 3x^2}{x^2 + 2k^2x^2}$$
$$= 3 - \frac{2k^3x}{1 + 2k^2} \to 3 - \frac{2k^2 \cdot 0}{1 + 2k^2} = 3 \quad \text{då } x \to 0.$$

Då har man hittat en kandidat för gränsvärdet. Nu ska man uppskatta

$$\left|\frac{6y^2 - 2y^3 + 3x^2}{x^2 + 2y^2} - 3\right| = \left|\frac{-2y^3}{x^2 + 2y^2}\right| = |y| \cdot \underbrace{\frac{2y^2}{x^2 + 2y^2}}_{\leq 1} \leq |y|.$$

Absolutbeloppet $|y|$ är kontinuerligt och går mot 0 då $(x, y) \to (0, 0)$. Enligt instängningsregeln existerar det givna gränsvärdet och är lika med 3.

Anmärkning: Det räcker att undersöka funktionsuttrycket längs den vågräta linjen $y = 0$ (eller den lodräta linjen $x = 0$) för att få fram kandidaten.

(b) Man börjar med att undersöka funktionsuttrycket på vägen mot punkt $(1, 0)$ längs räta linjer $y = k(x - 1)$, $k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{yx - y}{x^2 - 2x + y^2 + 1} = \Big/ y = k(x-1) \Big/ = \frac{k(x^2 - x) - k(x - 1)}{x^2 - 2x + 1 + k^2(x^2 - 2x + 1)}$$
$$= \frac{k(x^2 - 2x + 1)}{(1 + k^2)(x^2 - 2x + 1)} = \frac{k}{1 + k^2} \to \frac{k}{1 + k^2} \quad \text{då } x \to 1.$$

Det innebär att olika linjer leder till olika gränsvärden och så existerar det givna gränsvärdet inte.

Anmärkning: Det räcker att undersöka funktionsuttrycket längs den vågräta linjen $y = 0$ (eller den lodräta linjen $x = 1$) och sedan längs en sned linje, exempelvis $y = x - 1$, för att se att gränsvärdet inte existerar.

Uppgift 2. Gradienten till f är $\nabla f(x, y) = (2e^{2x-3y} - 2 + 5y, -3e^{2x-3y} + 3 + 5x)$. Andra ordningens partiella derivator blir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4e^{2x-3y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6e^{2x-3y} + 5, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9e^{2x-3y}.$$

Hessmatrisen i origo är då

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 4e^0 & -6e^0 + 5 \\ -6e^0 + 5 & 9e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\det Hf(0, 0) = 4 \cdot 9 - (-1)(-1) = 35$ är positiv och första elementet i Hessmatrisen (d.v.s. 4) är positivt, så är $Hf(0, 0)$ positivt definit. Därför är origo ett lokalt minimum.

Uppgift 3. Ellipsoiden är beskriven som en nivåyta $f(x, y, z) = 1$, där $f(x, y, z) = x^2/2 + y^2/3 + z^2/4$. Tangentplanets normalvektor ges alltså av $\nabla f(x, y, z) = (x, 2y/3, z/2)$. Man ska bestämma de tangentplan som är parallella med $x - y + z = 0$, vilket innebär att normalvektor ska vara parallell med vektorn $(1, -1, 1)$. Med andra ord ska det finnas något tal $k \in \mathbb{R}$ sådant att

$$\begin{pmatrix} x \\ 2y/3 \\ z/2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = k \\ y = -3k/2 \\ z = 2k \end{cases}$$

Tangeringspunkten ligger på ellipsoiden, så x, y och z som precis bestämts måste uppfylla ellipsoidens ekvation:

$$1 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = \frac{k^2}{2} + \frac{9k^2/4}{3} + \frac{4k^2}{4} = \frac{2k^2 + 3k^2 + 4k^2}{4} = \frac{9k^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad k^2 = \frac{4}{9} \quad \Leftrightarrow \quad k = \pm\frac{2}{3}.$$

Det finns alltså två tangentplan som efterfrågas.

$k = 2/3$: Tangeringspunkten är $(x, y, z) = (k, -3k/2, 2k) = (2/3, -1, 4/3)$ och då är planets ekvation $x - y + z = c$ där talet c bestäms genom att sätta in tangeringspunktens koordinater, $c = 2/3 - (-1) + 4/3 = 3$.

$k = -2/3$: Tangeringspunkten är $(x, y, z) = (k, -3k/2, 2k) = (-2/3, 1, -4/3)$ och då är planets ekvation $x - y + z = d$ där talet d bestäms genom att sätta in tangeringspunktens koordinater, $d = -2/3 - 1 - 4/3 = -3$.

Svar: De sökta tangentplanen är $x - y + z = 3$ och $x - y + z = -3$.

Uppgift 4. Funktionen f är kontinuerlig och den är definierad på en sammanhängande kompakt mängd, vilket gör att värdemängden är ett slutet intervall från f:s minimivärde till f:s maximivärde.

Först undersöker man det inre av definitionsmängden. $\nabla f = (2x + 2y, 2x + 2y)$. Således är $\nabla f = (0, 0)$ om och endast om $y = -x$. Kandidater för extremvärden fås då genom att beräkna $f(x, -x) = x^2 - 2xx + (-x)^2 = 0$.

Nu undersöker man randen av definitionsmängden m.h.a. Lagrange multiplikatorer. Bivillkoret är $g(x, y) = 0$, där $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1$. Observera att $\nabla g = (0, 0)$ i en enda punkt, origo, som inte uppfyller bivillkoret. Enligt satsen om Lagrange multiplikatorer finns det $\lambda \in \mathbb{R}$ sådan att $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ och $g(x, y) = 0$. Detta ger följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2x + 2y = \lambda 4x^3 \\ 2x + 2y = \lambda 4y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x + 2y = \lambda 4x^3 \\ \qquad 0 = \lambda 4x^3 - \lambda 4y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x + 2y = \lambda 4x^3 \\ \qquad 0 = \lambda \quad \text{eller} \quad x^3 = y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Fall 1: $\lambda = 0$. Då ger första ekvationen att $x = -y$ och tredje ekvationen leder till att $y^4 = 1/2$. Då får man två kandidater, nämligen $(x, y) = (2^{-1/4}, -2^{-1/4})$ och $(x, y) = (-2^{-1/4}, 2^{-1/4})$. Funktionsvärdena är $f(2^{-1/4}, -2^{-1/4}) = f(-2^{-1/4}, 2^{-1/4}) = 0$.

Fall 2: $x^3 = y^3$, vilket är ekvivalent med $x = y$. Tredje ekvationen leder till att $y^4 = 1/2$. Då får man två kandidater, nämligen $(x, y) = (2^{-1/4}, 2^{-1/4})$ och $(x, y) = (-2^{-1/4}, -2^{-1/4})$. Funktionsvärdena är $f(2^{-1/4}, 2^{-1/4}) = f(-2^{-1/4}, -2^{-1/4}) = 2 \cdot 2^{1/2} = \sqrt{8}$.

Svar: Värdemängden av den givna funktionen är alltså intervallet $[0, \sqrt{8}]$.

Anmärkning: Man kan notera att $f(x, y) = (x + y)^2$ och på så sätt direkt inse att 0 är funktionens minimivärde.

Uppgift 5. Man ska beräkna partiella derivator av u m.h.a. kedjeregeln:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^{z^2}\big(\cos(x^2-y^2)2xD_1f + \sin(y^2-x^2)2xD_2f\big),\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= e^{z^2}\big(-\cos(x^2-y^2)2yD_1f - \sin(y^2-x^2)2yD_2f\big),\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= 2ze^{z^2}f.
\end{aligned}$$

När dessa sätts in i PDE:n, så får man

$$\begin{aligned}
VL &= ye^{z^2}\big(\cos(x^2-y^2)2xD_1f + \sin(y^2-x^2)2xD_2f\big)\\
&\qquad + xe^{z^2}\big(-\cos(x^2-y^2)2yD_1f - \sin(y^2-x^2)2yD_2f\big) + 2ze^{z^2}f = 2ze^{z^2}f\\
HL &= 2zu = 2ze^{z^2}f\,.
\end{aligned}$$

Uppenbarligen är $VL = HL$ (oavsett f).

Uppgift 6. P.g.a. cirkulär symmetri inför man polära koordinater, $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$, där $r \geq 0$ och $\theta \in [-\pi,\pi]$ skulle ge hela planet. Integrationsområdet översätts till polära koordinater:

$$\begin{aligned}
4 \leq x^2+y^2 \leq 16 \quad&\Leftrightarrow\quad 4 \leq r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \leq 16 \quad\Leftrightarrow\quad 4 \leq r^2 \leq 16 \quad\Leftrightarrow\quad 2 \leq r \leq 4,\\
x \geq 0 \quad&\Leftrightarrow\quad r\cos\theta \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \theta \in [-\pi/2,\pi/2]\\
y \leq x \quad&\Leftrightarrow\quad r\sin\theta \leq r\cos\theta \quad\Leftrightarrow\quad \sin\theta \leq \cos\theta \quad\Leftrightarrow\quad \theta \in [-3\pi/4,\pi/4].
\end{aligned}$$

Nu ska integranden oversättas till polära koordinater:

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}\,.$$

Funktionaldeterminanten för polära koordinater är r och så är $dA = r\,dr\,d\theta$.

Efter variabelbytet kan man beräkna integralen genom itererad integration.

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(\int_2^4 \frac{\cos\theta}{r}\cdot r\,dr\right)d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} 2\cos\theta\,d\theta = \Big[2\sin\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/4} = \sqrt{2}+2.$$

Uppgift 7. P.g.a. sfärisk symmetri inför man rymdpolära (sfäriska) koordinater, $x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$ och $z = r\cos\varphi$, där $r \geq 0$, $\varphi \in [0,\pi]$ och $\theta \in [-\pi,\pi]$ skulle ge hela rummet. Integrationsområdet översätts till polära koordinater:

$$\begin{aligned}
1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \quad&\Leftrightarrow\quad 1 \leq r^2 \leq 4 \quad\Leftrightarrow\quad r \in [1,2],\\
x \geq 0 \quad&\Leftrightarrow\quad r\sin\varphi\cos\theta \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\theta \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \theta \in [-\pi/2,\pi/2],\\
y \geq 0 \quad&\Leftrightarrow\quad r\sin\varphi\sin\theta \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\theta \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \theta \in [0,\pi],\\
z \geq 0 \quad&\Leftrightarrow\quad r\cos\varphi \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\varphi \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi \in [0,\pi/2],\\
z \geq \sqrt{x^2+y^2} \quad&\Leftrightarrow\quad r\cos\varphi \geq r\sin\varphi\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\\
&\Leftrightarrow\quad \cos\varphi \geq \sin\varphi \quad\Leftrightarrow\quad \varphi \in [0,\pi/4].
\end{aligned}$$

Sammanfattningsvis är $r \in [1,2]$, $\theta \in [0,\pi/2]$ och $\varphi \in [0,\pi/4]$.

Nu ska integranden översättas till rymdpolära koordinater:

$$\frac{xy}{x^2+y^2+z^2} = \frac{r^2 \sin^2\varphi \cos\theta \sin\theta}{r^2} = \sin^2\varphi \cos\theta \sin\theta.$$

Funktionaldeterminanten för rymdpolära koordinater är $r^2 \sin\varphi$ och så är $dV = r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$.

Efter variabelbytet kan man beräkna integralen genom itererad integration.

$$\begin{aligned}
\iiint_K \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\,dV &= \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_1^2 \sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\cdot r^2\sin\varphi\,dr\right)d\theta\right)d\varphi \\
&= \int_1^2 r^2\,dr \int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{\pi/4}\sin^3\varphi\,d\varphi \\
&= \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\cos^3\varphi - 3\cos\varphi}{3}\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} + 2}{3} = \frac{7(4\sqrt{2}-5)}{36\sqrt{2}} = \frac{56-35\sqrt{2}}{72}
\end{aligned}$$

Uppgift 8. Hela rummet är enkelt sammanhängande.

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}F_1(x,y,z)\\ F_2(x,y,z)\\ F_3(x,y,z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(e^{yz}+yze^{yz})-(e^{yz}+zye^{yz})\\ \big(\cos(xz)-zx\sin(xz)\big)-\big(\cos(xz)-xz\sin(xz)\big)\\ 1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

De tillräckliga villkoren är uppfyllda och så är vektorfältet $\mathbf{F}$ konservativt och man kan hitta dess potentialfunktion Φ genom att integrera komponenter av fältet och derivera de uppkomna funktionerna flera gånger.

$$\begin{aligned}
&\Phi'_x(x,y,z) = F_1(x,y,z) = y + z\cos(xz) + 1 \\
&\quad\Rightarrow\quad \Phi(x,y,z) = \int y + z\cos(xz) + 1\,dx = xy + \sin(xz) + x + a(y,z); \\
&\quad\Rightarrow\quad \Phi'_y(x,y,z) = x + a'_y(y,z) \quad \text{och} \quad \Phi'_y(x,y,z) = F_2(x,y,z) = x + ze^{yz} - 2 \\
&\quad\Rightarrow\quad a'_y(y,z) = ze^{yz} - 2 \quad\Rightarrow\quad a(y,z) = \int ze^{yz} - 2\,dy = e^{yz} - 2y + b(z) \\
&\quad\Rightarrow\quad \Phi(x,y,z) = xy + \sin(xz) + e^{yz} + x - 2y + b(z) \\
&\quad\Rightarrow\quad \Phi'_z(x,y,z) = x\cos(xz) + ye^{yz} + b'(z) \\
&\qquad\qquad \text{och} \quad \Phi'_z(x,y,z) = F_3(x,y,z) = ye^{yz} + x\cos(xz) + 3 \quad\Rightarrow\quad b'(z) = 3 \\
&\quad\Rightarrow\quad b(z) = 3z + c \quad\Rightarrow\quad \Phi(x,y,z) = xy + \sin(xz) + e^{yz} + x - 2y + 3z + c.
\end{aligned}$$

Värdet på kurvintegralen bestäms m.h.a. potentialfunktionen:

$$\begin{aligned}
&\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \Phi(\pi,-1,1/2) - \Phi(0,3,2) \\
&\quad = -\pi + \sin\frac{\pi}{2} + e^{-1/2} + \pi + 2 + \frac{3}{2} - \Big(0 + \sin 0 + e^6 + 0 - 6 + 6\Big) = \frac{9}{2} + \frac{1}{\sqrt{e}} - e^6.
\end{aligned}$$

Uppgift 9. (a) Antag att $D \subset \mathbb{R}^2$ är det område som innesluts av kurvan C. Då följer det av Greens sats att

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \oint_C f(x)dx + g(y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial g(y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x)}{\partial y}\right)dA = \iint_D 0\,dA = 0.$$

(b) Antag att Q betecknar kvadraten $[0,1]\times[0,1]$. Enligt Greens sats är

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \mathbf{H}\bullet d\mathbf{r} &= \oint_\gamma h(y)dx + h(x)dy = \iint_Q \Big(\frac{\partial h(x)}{\partial x} - \frac{\partial h(y)}{\partial y}\Big)\, dA = \iint_Q h'(x) - h'(y)\, dA \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 h'(x) - h'(y)\, dy\right) dx = \int_0^1 \Big[yh'(x) - h(y)\Big]_{y=0}^1 dx \\ &= \int_0^1 h'(x) - \big(h(1)-h(0)\big)\, dx = \Big[h(x) - x\big(h(1)-h(0)\big)\Big]_{x=0}^1 \\ &= h(1) - h(0) - \big(h(1)-h(0)\big) = 0\,. \end{aligned}$$

Uppgift 10. (a) Enligt divergenssatsen är $\oiint_{\partial K} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$.

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 - 2 + 3 = 2\,.$$

Således

$$\oiint_{\partial K} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_K 2\, dV = 2\cdot \text{volymen av } K = 2\cdot\frac{4}{3}\pi 3^3 = 72\pi\,.$$

(b) Enligt divergenssatsen är $\oiint_{\partial K}(\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_K \operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F})\, dV$.

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathbf{F} &= \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}F_1(x,y,z)\\ F_2(x,y,z)\\ F_3(x,y,z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D_yF_3 - D_zF_2\\ D_zF_1 - D_xF_3\\ D_xF_2 - D_yF_1\end{pmatrix} \\ \operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F}) &= \operatorname{div}\begin{pmatrix}D_yF_3 - D_zF_2\\ D_zF_1 - D_xF_3\\ D_xF_2 - D_yF_1\end{pmatrix} \\ &= (D_{yx}F_3 - D_{zx}F_2) + (D_{zy}F_1 - D_{xy}F_3) + (D_{xz}F_2 - D_{yz}F_1) = 0\end{aligned}$$

därför att ordningen av derivering kan kastas om eftersom fältet är slätt. Således

$$\oiint_{\partial K}(\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_K \operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F})\, dV = \iiint_K 0\, dV = 0\,.$$