Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Tentamen
2018-10-13, 8:30–12:30

MVE041: Flervariabelmatematik

Examinator: Lukáš Malý, tel. 031 - 772 53 42
Telefonvakt: Maximilian Thaller, tel. 031 - 772 53 25
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal och formler på tentatesens baksida. Inga miniräknare är tillåtna.

Betygsgränser: För betyg 3 krävs 20 p; för betyg 4 krävs 30 p; för betyg 5 krävs 40 p (utav 50 p).
Lösningsförslag publiceras på kurshemsidan idag kl. 14:30.

OBS: Alla svar skall vara väl motiverade. Bristande motiveringar kan orsaka poängavdrag.

1. Avgör om följande gränsvärden existerar: (4p)

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x+y-2}{x^2-y^2-4x+2y+3}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6y^2+3y^4+2x^2+x^4}{x^2+3y^2}$

2. Låt $f(x,y,z) = x^3 + xy - e^{1-yz}$, där $x, y, z \in \mathbb{R}$. (5p)

(a) Bestäm linjäriseringen av f runt punkten $(1, 2, \frac{1}{2})$.

(b) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(2, 1, 1)$ i riktningen $(2, -1, -2)$.

3. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = x^2 + y^2$ på området $3x^2 + 2xy + 3y^2 \leq 16$. (6p)

4. Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är en kontinuerligt differentierbar funktion. Bestäm talen $a, b \in \mathbb{R}$ så att funktionen (5p)

$$u(x,y,z) = z\, f(xy, ax + by + 2z), \quad x, y \in \mathbb{R}, z > 0,$$

löser den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} - (6x+2y)\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{by-ax}{2z}\, u.$$

5. Beräkna dubbelintegralen (6p)

$$\iint_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\; dA,$$

där $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1,\ x \geq 0 \text{ och } y \geq 0\right\}$

Tips: Använd variabelbytet $x = r\cos^4\theta$ och $y = r\sin^4\theta$.

OBS: Trigonometriska formler finns på baksidan.

6. Beräkna trippelintegralen (7p)

$$\iiint_K \frac{dV}{x^2+y^2+z^2},$$

där integrationsområdet är den kropp som beskrivs av olikheterna

$$1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, \quad z \geq \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{och} \quad x \geq y.$$

Var god vänd!

7. (a) Bestäm en potentialfunktion till vektorfältet (4p)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^{xy} + z \\ xe^{xy} + z \\ \frac{2z}{1+z^2} + x + y \end{pmatrix}, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(b) Beräkna kurvintegralen (3p)

$$\int_C \left(ye^{xy} + z\right) dx + \left(xe^{xy} + z\right) dy + \left(\frac{2z}{1+z^2} + x + y\right) dz,$$

där kurvan C parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 + t^2 \\ t^3 - 2t^2 + 1 \\ t^2 + t - 1 \end{pmatrix}$ då $t \in [0, 1]$.

8. Låt $K \subset \mathbb{R}^3$ vara en begränsad kropp med en slät orienterbar yta ∂K. Antag att funktionerna $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerligt differentierbara i en öppen omgivning av K.

(a) Använd divergenssatsen med vektorfältet $\mathbf{F} = \left(fg,\ 0,\ 0\right)^T$ för att bevisa att (4p)

$$\iiint_K f \frac{\partial g}{\partial x}\, dV = \oiint_{\partial K} f g\, N_x\, dS - \iiint_K g \frac{\partial f}{\partial x}\, dV,$$

där N_x är x-komponenten av ytans utåtriktade enhetsnormalvektor.

(b) Vilka vektorfält kan användas för att bevisa analoga likheter med partiella derivator m.a.p. y i volymintegralerna och N_y i ytintegralen, resp. med partiella derivator m.a.p. z i volymintegralerna och N_z i ytintegralen? (1p)

9. Låt C vara skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2 = 1$ och den hyperboliska paraboloiden $z = x^2 - y^2$. Beräkna kurvintegralen $\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -x - y + z \\ x + y - z \\ x - y + z \end{pmatrix}$ och kurvan C genomlöps ett varv moturs (sett uppifrån). (5p)

Lycka till!

Några trigonometriska formler

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sqrt{1 - \cos v} = \sqrt{2}\sin(\tfrac{v}{2}),\ \ v \in [0, 2\pi], \qquad \sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\big)$$
$$\sqrt{1 + \cos w} = \sqrt{2}\cos(\tfrac{w}{2}),\ \ w \in [-\pi, \pi], \qquad \cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\big)$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\big)$$