Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE041, (MVE040), Chalmers, 2012-09-01, V

Skrivtid:	08.30-12.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt:	Oskar Hamlet, tel. 0703-088304.
	Frågor om tentamen kan ställas omkring 9.30 och 11.30.
Resultat:	E-post från LADOK. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser:	10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag:	På www efter 17.
Hjälpmedel:	Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde (˜).

Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

1. Vi vill bestämma en 2×2-matris $\mathbf{X}$ som är **övertriangulär** (element under diagonalen är noll) och som satisfierar matrisekvationen:
$$\mathbf{X}^3 + 2\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Inför lämpliga beteckningar för de obekanta elementen i matrisen, ställ upp ett system av ekvationer för de obekanta. Formulera sedan Newtons metod för ekvationssystemet. (3p)

2. Beräkna
$$\int_\gamma \frac{y}{x+2y}\,dx + \frac{x}{x+2y}\,dy$$
där γ är den räta linjen från $(1, 2)$ till $(3, 4)$. (3p)

3. Låt $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Bestäm först tangentplanen till f i punkterna $(1, 1, 3)$ och $(2, 0, 4)$. Beräkna sedan skärningslinjen mellan planen. Linjen skall ges på parameterform. (3p)

4. Låt $f(x, y) = x^2 + y^2(x + 1)$. Bestäm alla stationära punkter till f samt karaktären på punkterna. (3p)

5. Beräkna volymen av den kropp som bestäms av olikheterna
$$x^2 + y^2 \le 2 \text{ och } x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \quad (3p)$$

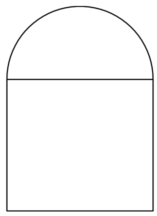
6. Visa att $-yf'_x(x,y) + xf'_y(x,y)$ blir f'_φ vid variabelbytet $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Utnyttja detta för att sedan lösa differentialekvationen $-yf'_x(x,y) + xf'_y(x,y) = x$. (3p)

7. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet.

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x-y)-1}{(x-y)^2}$ b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x+y)-1}{(x-y)^2}$

   (3p)

8. I bilden nedan ser du en saltströare från sidan:



Saltströaren består av en rotationssymmetrisk cylinder och den övre delen är en halvsfär. Vi tänker oss att det finns salt både inuti cylindern och halvsfären (du behöver inte ta hänsyn till någon godstjocklek i din lösning).

Vi vill maximera volymen givet att ströarens totala area inte överstiger 0.013m^2. Ströarens totala höjd måste ligga i intervallet $[0.05,\ 0.07]$ m och ströarens cylinderdiameter i intervallet $[0.03,\ 0.05]$ m.

a) Gör en matematisk formulering av problemställningen. Slarva inte med detaljerna.
Om jag inte förstår vad du menar får du inga poäng på uppgiften!

b) Skriv en Matlabkod som utnyttjar `fmincon` för att lösa problemet. Ditt program skall skriva ut maximal volym samt värdena på de variabler som bestämmer ströarens form. Du behöver **inte** skicka med `options`.

`fmincon` kan ju lösa följande problem:

```
min f(x)
  LB <= x <= UB                     enkla gränser
  A * x  <= B,      Aeq * x = Beq   linjära bivillkor
  C(x)   <= 0,      Ceq(x)  = 0     ickelinjära bivillkor
```

Vi minns också funktionsprototyperna och anropet av `fmincon`:

```
function obj_val = obj_fun(x)  och  function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)
```

(4p)