Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2012-09-01

1. $\mathbf{X}$ definieras av tre element ($x_{2,1} = 0$). Låt $\alpha = x_{1,1}$, $\beta = x_{1,2}$ och $\gamma = x_{2,2}$. Vi har då:

$$\mathbf{X}^3+2\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha^3+2\alpha & (\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2+2)\beta \\ 0 & \gamma^3+2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3+2\alpha = 1 \\ (\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2+2)\beta = 1 \\ \gamma^3+2\gamma = 1 \end{cases}$$

Så Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k+1} \\ \beta_{k+1} \\ \gamma_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3\alpha_k^2+2 & 0 & 0 \\ (2\alpha_k+\gamma_k)\beta_k & \alpha_k^2+\alpha_k\gamma_k+\gamma_k^2+2 & (\alpha_k+2\gamma_k)\beta_k \\ 0 & 0 & 3\gamma_k^2+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_k^3+2\alpha_k-1 \\ (\alpha_k^2+\alpha_k\gamma_k+\gamma_k^2+2)\beta_k-1 \\ \gamma_k^3+2\gamma_k-1 \end{bmatrix}$$

2. Kurvan kan skrivas $t \to (1,2)+t(1,1)$, $t \in [0,2]$.

$$\int_\gamma \frac{y}{x+2y}\,dx + \frac{x}{x+2y}\,dy = \int_0^2 \frac{2+t}{1+t+2(2+t)}\cdot 1 + \frac{1+t}{1+t+2(2+t)}\cdot 1\,dt = \int_0^2 \frac{3+2t}{5+3t}\,dt =$$

$$\int_0^2 \frac{2}{3} - \frac{1/3}{5+3t}\,dt = \left[\frac{2t}{3} - \frac{1}{9}\log(5+3t)\right]_0^2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{9}\log(5/11)$$

3. Tangentplanet i punkten $(a,b,f(a,b))$ ges av $z = a^2+2b^2+2a(x-a)+4b(y-b)$. Tangentplanen i $(1,1,3)$ och $(2,0,4)$ blir således $z = 3+2(x-1)+4(y-1)$ samt $z = 4+4(x-2)$. Genom att sätta z-värdena lika eliminerar vi z och får veta sambandet mellan x och y: $3+2(x-1)+4(y-1) = 4+4(x-2)$, så att $1-2x+4y = 0$. Vi tar x som parameter så att $y = (2x-1)/4$. Linjen ligger i planen och speciellt i planet $z = 4+4(x-2)$. Detta ger $z = -4+4x$. Så linjen kan skrivas: $x \to (0,-1/4,-4)+x(1,1/2,4)$.

4. De stationära punkterna är lösningarna till $\text{grad} f(x,y) = \mathbf{0}$. Systemet blir $2x+y^2 = 0,\ 2y(x+1) = 0$. Den andra ekvationen har lösningarna $y = 0$ eller $x = -1$. $y = 0$ i den första ekvationen ger $x = 0$ och $x = -1$ ger $y = \pm\sqrt{2}$, så de stationära punkterna är $(0,0)$, $(-1,-\sqrt{2})$ och $(-1,\sqrt{2})$.

   För karaktären studerar vi den kvadratiska formen $Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2$, där (a,b) är en av de stationära punkterna. Så för vår funktion: $Q(h,k) = 2h^2+4bhk+2(a+1)k^2$. Eftersom vi endast är intresserade av tecken kan vi studera $Q(h,k) = h^2+2bhk+(a+1)k^2$. Nu till de tre punkterna:

   - $(a,b) = (0,0)$: $Q(h,k) = h^2+k^2$, som är positivt definit (ty kvadratsumma, som är noll precis då $h = k = 0$). Så, $(0,0)$ är ett strängt lokalt minimum.
   - $(a,b) = (-1,-\sqrt{2})$: $Q(h,k) = h^2 - 2\sqrt{2}hk$, som är indefinit ty, $Q(1,1) = 1-2\sqrt{2} < 0$ och $Q(1,0) = 1 > 0$. Sadelpunkt.
   - $(a,b) = (-1,\sqrt{2})$: $Q(h,k) = h^2 + 2\sqrt{2}hk$, som är indefinit ty, $Q(-1,1) = 1-2\sqrt{2} < 0$ och $Q(1,0) = 1 > 0$. Sadelpunkt.

5. Den volym som söks ligger inuti en cylinder och inuti ett klot. Integrationsområdet bestäms av cylindern och begränsningsytorna, i z-led, av klotet.

   Eftersom kroppen är symmetrisk med avseende på xy-planet kan vi skriva volymen som:

$$V = 2\iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}\;dxdy$$

   där $D = \{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 2\,\}$. Vi inför polära koordinater, $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ och $r \le \sqrt{2}$. Funktionaldeterminanten är r varför volymen blir

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-r^2}\,r\,dr\,d\varphi = 4\pi\left[-\frac{(4-r^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{4\pi(8-\sqrt{8})}{3}$$

6. Derivera $f(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$ med avseende på φ:
$$f'_\varphi = f'_x\, x'_\varphi + f'_y\, y'_\varphi = f'_x\,(-r\sin\varphi) + f'_y\,(r\cos\varphi) = -y\, f'_x + x\, f'_y$$
DE blir $f'_\varphi = r\cos\varphi$, så att $f = r\sin\varphi + g(r)$, där g är godtycklig, derviverbar funktion av en variabel. I de ursprungliga variablerna blir lösningen $f(x,y) = y + g(\sqrt{x^2+y^2})$.

7. Gränsvärdet i a) existerar och är $-1/2$. Sätt $t = x - y$ och utnyttja formelbladet:
$$\frac{\cos(x-y)-1}{(x-y)^2} = -2\left[\frac{\sin(t/2)}{t}\right]^2 = -2\left[\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right]^2 \frac{1}{4} \to -\frac{1}{2}$$
Gränsvärdet i b) existerar inte. Tag $x = -y \neq 0$
$$\frac{\cos(x+y)-1}{(x-y)^2} = \frac{0}{(2x)^2} = 0$$
Tag nu $x \neq 0, y = 0$
$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -2\left[\frac{\sin(x/2)}{x}\right]^2 \to -\frac{1}{2}$$
som i uppgift a). Olika vägar mot origo kan alltså ge olika gränsvärden, varför gränsvärdet inte existerar.

8. a) Låt halvkotet ha radien r och låt cylinderns höjd vara h. Volym och area blir
$$V = \frac{2\pi r^3}{3} + \pi r^2 h, \quad A = 2\pi r^2 + 2\pi r h + \pi r^2$$
Vi använder ett ickelinjärt olikhetsbivillkor för arean. Om vi antar likhet så saknar problemet lösning! Bivillkoret på standardform lyder $A - 0.013 \leq 0$ (med A definierad enligt ovan). Villkoren på diametern är enkla gränser och villkoret på höjden blir linjära olikhetsvillkor. Olikhetsvillkoren blir $0.05 \leq r + h \leq 0.07$ så på standardform $-r - h \leq -0.05$ och $r + h \leq 0.07$. Eftersom $0.05 \leq r + h \leq 0.07$ och $0.015 \leq r \leq 0.025$ kan vi också få enkla grånser för h, $0.05 - 0.025 \leq h \leq 0.07 - 0.015$. Placerar vi (r, h) i vektorn w blir $LB = [0.015,\ 0.025]$ och $UB = [0.025,\ 0.055]$. Rimliga startgissningar på r och h får vi genom att ta mittpunkterna i LB och UB.

b) Vi placerar (r, h) i vektorn w. Här följer koden:

```
function salt
Aeq = []; Beq = [];
A   = [1 1;-1 -1];   B  = [0.07; -0.05];
LB  = [0.015 0.025]; UB = [0.025 0.055];

w0 = [0.02; 0.04];  % startgissning
w  = fmincon(@obj_fun, w0, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun);

r = w(1), h = w(2), volym = -obj_fun(w)

function val = obj_fun(w)
r = w(1); h = w(2);
val = -pi * (2 * r^3 / 3 + r^2 * h);

function [in_eq, eq] = constr_fun(w)
r = w(1); h = w(2);
eq = [];
in_eq = pi * r * (3 * r + 2 * h) - 0.013;
```