Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE041, (MVE040), Chalmers, 2012-01-11, V

Skrivtid:	08.30-12.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt:	Fredrik Lindgren, tel. 0703-088304.
	Frågor om tentamen kan ställas omkring 9.30 och 11.30.
Resultat:	E-post från LADOK. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser:	10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag:	På www 12/1.
Hjälpmedel:	Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde (˜).

Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

---

1. Vi vill bestämma en **symmetrisk** 2×2-matris $\mathbf{X}$ som satisfierar matrisekvationen:

$$\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Inför lämpliga beteckningar för de obekanta elementen i matrisen, ställ upp ett system av ekvationer för de obekanta. Formulera sedan Newtons metod för ekvationssystemet. (3p)

2. Beräkna

$$\int_\gamma e^x \sin y + 2y + 3 \; dx + e^x \cos y + 3x \; dy$$

där γ halva enhetsscirkeln från punkten $(1, 0)$ via punkten $(0, 1)$ till punkten $(-1, 0)$. (3p)

3. Låt $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Bestäm alla (x, y) där tangentplanet till f, i punkten $(x, y, f(x, y))$, innehåller linjen $t \to (2, -1, 3) + t\,(1, 1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$ (observera att **alla** punkter på linjen skall ligga i tangentplanet). (3p)

4. Låt $f(x, y) = x^2(y + 1) + y^2$. Bestäm alla stationära punkter till f samt karaktären på punkterna. (3p)

5. Beräkna volymen av den kropp som bestäms av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq 2 \;\text{ och }\; x^2 + y^2 - z^2 \geq 1 \quad (3p)$$

---

6. Följande PDE kallas Helmholtz ekvation (c är en reell konstant) och u är en funktion av x och y:

$$u''_{xx} + u''_{yy} + c^2 u = 0$$

Vi söker en lösning på formen $u(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, där f är en funktion av en variabel. Visa att funktionen f satisfierar differentialekvationen:

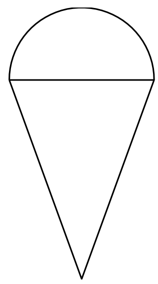
$$f''(r) + \frac{f'(r)}{r} + c^2 f(r) = 0,\ 0 < r \quad \text{(3p)}$$

7. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet.

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 - y^2 + x - y)}{x-y} \qquad \text{b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y}$$

(3p)

8. I bilden nedan ser du en glass-strut från sidan.



Struten består av ett rån i form av en rotationssymmetrisk kon och den övre delen är ett halvklot. Vi tänker oss att det finns glass både inuti konen och halvklotet och att rånet har tjockleken noll (du behöver således inte ta hänsyn till rånets tjocklek i din lösning).

Vi vill maximera glassvolymen givet att rånets area inte överstiger 0.011m^2. Konens öppningsvinkel får inte överstiga $40°$.

a) Gör en matematisk formulering av problemställningen. Slarva inte med detaljerna.
Om jag inte förstår vad du menar får du inga poäng på uppgiften!

b) Skriv en Matlabkod som utnyttjar `fmincon` för att lösa problemet. Ditt program skall skriva ut maximal volym samt värdena på de variabler som bestämmer glass-strutens form. Du behöver **inte** skicka med `options`.

`fmincon` kan ju lösa följande problem:

```
min f(x)
  LB <= x <= UB                        enkla gränser
  A * x  <= B,     Aeq * x = Beq   linjära bivillkor
  C(x)   <= 0,     Ceq(x)  = 0     ickelinjära bivillkor
```

Vi minns också funktionsprototyperna och anropet av `fmincon`:

```
function obj_val = obj_fun(x)  och  function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)
```

(4p)